PORCENTAJES Y APLICACIONES ECONÓMICAS

Si eres alumno, alrededor del 70 % de tu aprendizaje está relacionado con tu atención en clase: atiende, entiende, aprende.

1. Porcentajes: repaso

Un tanto por ciento, un porcentaje, es una fracción con denominador 100. El tanto por ciento indica lo que se toma de algo que se ha dividido en 100 partes iguales.

Así, por ejemplo, un 21 por ciento (21 %), es la fracción $\frac{21}{100}=0,21$. Esta cantidad, 0,21, es la tasa unitaria, el porcentaje correspondiente a 1. Por eso, para hallar el 21 % de cualquier cantidad se multiplica por 0,21. El 21 % de 1200 € = $\frac{21}{100}\cdot 1200$ = 0,21 · 1200 = 252 €.

Aumentos porcentuales

Cuando a una cantidad inicial, *C*, se le añade un tanto por ciento de la misma cantidad, se habla de aumentos porcentuales. (Es lo propio de las subidas de precios o de los impuestos).

Para aumentar un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por 1 + *r*, siendo *r* la tasa unitaria. Por tanto, la cantidad final, C_F, se obtiene multiplicando *C* por (1 + *r*): $C_F=C\cdot(1+r)$.

Ejemplos:

a) El Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA), para gran cantidad de productos es del 21 %. Esto significa que, si un producto vale 100 euros, deben pagarse 121 €; el 21 % más.

Si ese producto costase 1200 €, habría que pagar 1200 + 21 % de 1200 = 1200 + 252 = 1452.

Es más rápido y eficaz hacerlo directamente: $C_F=1200\cdot(1+0,21)=1200\cdot 1,21=1452$ €.

b) Si algo que valía 230 € ha subido el 12 %, su nuevo precio será $230\cdot(1+0,12)=257,6$ €.

c) Si los nacimientos en una determinada región han aumentado el último año en un 7 %, entonces, si se sabe que el año pasado nacieron 15500 niños, este último año habrán nacido:

$15500\cdot(1+0,07)=15500\cdot 1,07=16585$ niños.

Disminuciones porcentuales

Cuando a una cantidad inicial se le quita un tanto por ciento de la misma cantidad se habla de disminuciones porcentuales. (Es lo propio de las rebajas).

Para disminuir un porcentaje a una cantidad se multiplica esa cantidad por 1 – *r*, siendo *r* la tasa de descuento unitaria. La cantidad final, C_F, se obtiene multiplicando *C* por (1 – *r*): $C_F=C\cdot(1-r)$.

Ejemplos:

a) Si se anuncian rebajas del 35 %, significa que lo que valía 100 €, ahora vale 35 € menos; esto es, 100 – 35 = 65 €. Y lo que valía 1 €, valdrá 0,65 €. Para calcular los precios rebajados habrá que multiplicar los iniciales por 0,65.

Así, si un teléfono móvil costaba 270 €, su precio rebajado será:

$270\cdot(1-0,35)=270\cdot 0,65=175,50$ €.

b) Si un frigorífico que costaba 450 € se ha rebajado un 30 %, ahora valdrá:

450 · 0,70 = 315 €.

Distintos enfoques de los porcentajes

Los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales son los más sencillos, pues son los más directos. Pero, en la vida corriente pueden plantearse situaciones no tan claras. A continuación, se plantean, con ejemplos, algunas de esas situaciones.

1. ¿Cuál es el precio sin IVA?

- El precio final (IVA incluido) de un ordenador es de 582 €. ¿Cuál es su precio inicial, sin IVA?

Recuerda que $C_F = C\cdot(1+r)$. En este caso, se conoce $C_F = 582$, IVA = 21 % → r = 0,21.

Por tanto, $582 = C\cdot 1,21 \Rightarrow C = \dfrac{582}{1,21} = 480,99$ €.

Para hallar el precio sin IVA (si es el 21 %) se divide lo pagado entre 1,21.

2. "Día sin IVA"

- El "día sin IVA" que anuncia determinada cadena comercial, indica que el precio de sus productos no se verá incrementado por el 21 % de IVA. Eso no equivale a una rebaja del 21 %, significa que si, por ejemplo, algo vale 100 €, por lo que debería pagarse 121 €, al no cargar el IVA, se pagan los 100 € iniciales. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja real?

→ Por lo que vale 100 €, con el IVA debería pagarse 121 €, pero se pagan 100 €. Luego, aplicando $C_F = C\cdot(1+r)$, se tiene que C_F = 100 y C = 121 ⇒ $1+r = \dfrac{100}{121} \approx 0,826 \Rightarrow r = 1-0,826 = 0,174$.

El descuento real es del 17,4 %.

Nota: Si se conocen los valores inicial y final de una alteración de cantidades, el porcentaje de variación se obtiene dividiendo el valor final entre el inicial. La diferencia con la unidad da la tasa, positiva o negativa, de subida o bajada. (Así: cociente = 1,07 ⇒ +7 %; cociente = 0,85 ⇒ –15 %).

3. ¿A qué porcentaje corresponde determinada cantidad?

- Hace unos meses, una casa se vendía por 230000 €. Como no se vende por esa cantidad, el propietario ha decidido rebajar su precio de venta en 12000 €. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?

El nuevo precio será de 218000, luego: $C_F = C\cdot(1+r) \Rightarrow$

$$218000 = 230000\cdot(1-r) \Rightarrow 1-r = \frac{218000}{230000} \approx 0,948 \rightarrow r = 1 - 0,948 = 0,052, \text{ el } 5,2\ \%.$$

4. Porcentajes sucesivos.

- En España, en el año 2014 se fabricaron un total de 2405597 vehículos automóviles. Según el INE, la fabricación superó en un 11 % a la de 2013; mientras que en 2015 aumentó un 14 %.

¿Cuál fue el porcentaje de aumento desde 2013 a 2015?

Ojo, la respuesta no es 11 + 14 = 25 %. (Antes de seguir leyendo, piensa lo que harías).

Lo primero que puede hacerse es averiguar el número de vehículos fabricados en 2013, V_{2013}. Se obtiene aplicando la fórmula de siempre: $C_F = C\cdot(1+r)$.

$$V_{2014} = V_{2013}\cdot(1+0,11) \Rightarrow V_{2013} = \frac{2405597}{1,11} = 2167205, \text{ redondeando a unidades.}$$

En segundo lugar, se calculan los vehículos fabricados en 2015:

$$V_{2015} = V_{2014}\cdot(1+0,14) \Rightarrow V_{2015} = 2405597\cdot(1,14) = 2742381.$$

Con esto, el porcentaje de aumento desde 2013 a 2015 se calcula dividiendo las cantidades respectivas: $\dfrac{2742381}{2167205} = 1,2654$ → El porcentaje de variación fue del 26,54 %.

Observación: El porcentaje acumulado se puede obtener multiplicando 1,11 · 1,14 = 1,2654, pues:

$$V_{2015} = \underline{V_{2014}}\cdot(1+0,14) = \underline{V_{2013}(1+0,11)}\cdot(1+0,14) = V_{2013}\cdot 1,2654 = V_{2013}\cdot(1+0,2654).$$

Porcentajes en todas partes

Los siguientes datos de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), se han obtenido en la web del Ministerio de Educación y FP, páginas 21 y 22. El coloreado y subrayado de datos es mío.

- La convocatoria de 2017 ha sido la primera en la que los estudiantes procedentes de Bachillerato han realizado la conocida como Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU). Este año se matricularon un total de 280.852 personas, esto supone un descenso de 6,5 puntos con respecto al año anterior. La convocatoria genérica (alumnos que han cursado Bachillerato) continúa siendo la mayoritaria, representando aproximadamente un 88 % del total de la matrícula.

El número de estudiantes que se presentó finalmente a la prueba fue de 264.980, de los cuales aprobaron 230.530. Los mayores de 25 años, mayores de 45 años y mayores de 40 años con experiencia laboral, suman un total de 33.785 matriculados, de los cuales 21.699 se presentaron finalmente a las pruebas y 12.151 aprobaron.

En las pruebas de acceso a la universidad, este año el total de mujeres presentadas es de 149.300, lo que supone un 56,3% de mujeres frente a un 43,7% de hombres. El porcentaje de aprobados no varía en exceso atendiendo al sexo de los participantes, siendo un 87% el porcentaje de hombres aprobados con respecto a los presentados y un 87,2% el de mujeres aprobadas con respecto a las presentadas. Si nos restringimos a las pruebas genéricas de acceso a la universidad, podemos observar que el 57,2% de los matriculados son mujeres, el 4,8% posee una nacionalidad extranjera y el 7,0% son mayores de 20 años.

Dar estos datos mediante una tabla facilita su comprensión.

Tabla 2.1.3 Número de matriculados, presentados y aprobados en las PAU por procedimiento de acceso, convocatoria y sexo. Año 2017

	Matriculados		Presentados		Aprobados	
	Total	Mujeres (%)	Total	Mujeres (%)	Total	Mujeres (%)
Total PAU	**280.852**	**55,8%**	**264.980**	**56,3%**	**230.530**	**56,5%**
PAU genérica convocatoria ordinaria	207.166	57,5%	205.077	57,6%	189.480	57,4%
PAU genérica convocatoria extraordinaria	39.901	55,3%	38.204	55,1%	28.899	54,8%
PAU para mayores de 25 años	28.027	44,2%	17.690	45,5%	9.917	43,6%
PAU para mayores de 45 años	4.651	54,3%	2.923	58,2%	1.445	61,7%
Acceso para mayores de 40 años con experiencia laboral	1.107	41,1%	1.086	41,3%	789	40,7%

Vamos a trabajar con estos datos.

- Si "Este año se matricularon un total de 280.852 personas, lo que supone un descenso de 6,5 puntos con respecto al año anterior", ¿cuántos alumnos se matricularon el año anterior?

→ Un descenso de 6,5 puntos indica un 6,5 % menos; lo que supone un 93,5 % → 100 – 6,5 = 93,5.

Si M_{2016} designa los matriculados en 2016, entonces, de $C_F = C\cdot(1+r) \Rightarrow$

$$280852 = M_{2016}\cdot(1-0,065) \Rightarrow M_{2016} = \frac{280852}{0,935} = 300376 \text{ (redondeado)}$$

- Si "El número de estudiantes que se presentó a la prueba fue de 264.980, de los cuales aprobaron 230.530", ¿cuál fue el porcentaje de aprobados?

→ Puede calcularse dividiendo: (N.º de aprobados)/(N.º de presentados) = $\frac{230530}{264980} = 0,87 \to 87$ %.

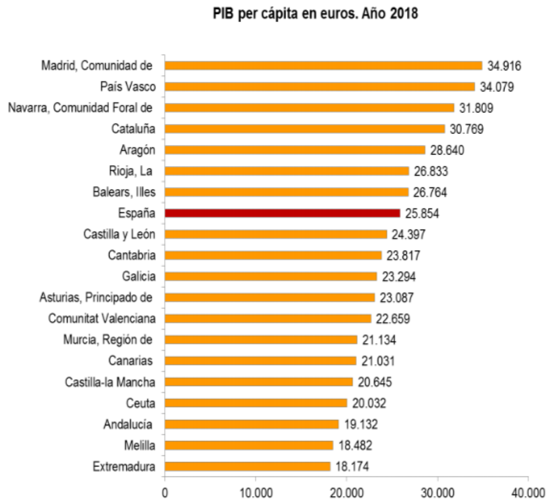
- ¿Cuál fue el porcentaje de aprobados en la "PAU genérica convocatoria ordinaria"? (Ver tabla).

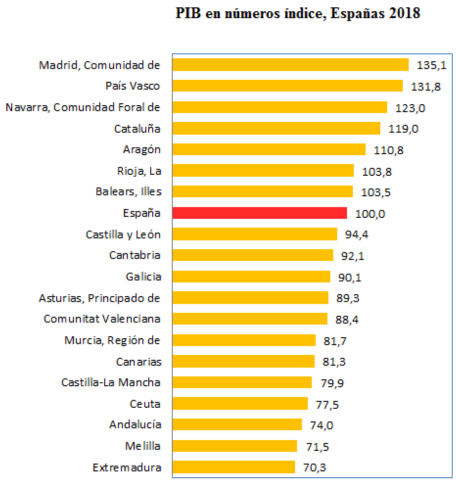
Como antes, se obtiene dividiendo los datos correspondientes: $\frac{189480}{205077} = 0,9239 \to 92,39$ %.

- Comprueba por tu cuenta algunos de los porcentajes que se dan en la tabla.

2. Números índice

Los números índice permiten estudiar la evolución cuantitativa de una determinada variable. También facilitan la comparación entre elementos relacionados. Para ello hay que fijar una base de referencia. Esa base suele ser 100; las posiciones posteriores (o anteriores) se indican en porcentajes, que se determinan mediante reglas de tres. En los gráficos que siguen se da un ejemplo.





España: 25854 € = 100.

El gráfico de la izquierda muestra el PIB per cápita de España, detallado por comunidades autónomas. (El PIB per cápita, ingreso per cápita o renta per cápita es un indicador económico que mide la relación existente entre el nivel de renta de un país y su población. Para ello, se divide el Producto Interior Bruto (PIB) de dicho territorio entre el número de habitantes. Ver).
Si consideramos los valores absolutos de esa renta: 25854 € para España; … 18174 € para Extremadura, es fácil perderse entre tantos números; y la comparación entre comunidades autónomas no es sencilla. Pero, si esos números se comparan con 100, se convierten en porcentajes y la comparación resulta más sencilla. Es lo que se hace en el gráfico de la derecha.

Para obtener el dato de Madrid se hace la operación $\frac{34916}{25854}\cdot 100 \approx 135{,}1\,\% \to (135{,}0506691)$.

Este resultado indica que el PIB de Madrid es un 35,1 % superior a la media nacional. Mientras que el PIB de Extremadura está casi 30 puntos por debajo de esa media.

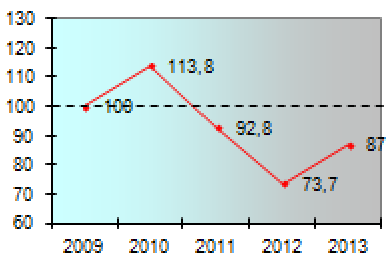
Ejemplo:
Supóngase que durante cinco años consecutivos el valor (precio) de las acciones de una determinada compañía "cerró el año" como se indica en la siguiente tabla:

Año	2014	2015	2016	2017	2018
Precio en € por acción	23,50	26,74	21,80	17,32	20,45

Si se toma como valor 100 el del año 2014, los números correspondientes a los años siguientes serán:

Año 2015: $\frac{26{,}74}{23{,}50}\cdot 100 \approx 113{,}8$; Año 2016: $\frac{21{,}80}{23{,}50}\cdot 100 \approx 92{,}8$

Año 2017: $\frac{17{,}72}{23{,}50}\cdot 100 \approx 73{,}7$; Año 2018: $\frac{20{,}45}{23{,}50}\cdot 100 \approx 87$



La tabla de números índice correspondiente sería:

Año	2014	2015	2016	2017	2018
Precio en € por acción	23,50	26,74	21,80	17,32	20,45
Número índice	**100**	**113,8**	**92,8**	**73,7**	**87**

Con frecuencia, los datos de la tabla suelen acompañarse de una gráfica.

3. Problemas de interés bancario

El interés es la ganancia o renta producida por un capital durante un periodo de tiempo; este interés puede ser simple, compuesto o continuo. La tasa de interés, que generalmente se da en tantos por cien, puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, diaria o continua.

Interés simple

Un capital C_0, al cabo de un año, a un interés del i % produce una renta $R = C_0 \cdot \frac{i}{100} = C_0 \cdot r$, donde $r = \frac{i}{100}$ indica la tasa en tanto por uno.

- El capital acumulado al cabo de un año será $C = C_0(1 + r)$.

Ejemplo:
Un capital de 20000 €, al 5 % anual, produce una renta anual de 20000 · 0,05 = 1000 €.
El capital acumulado al cabo de un año será $C = 20000 \cdot (1 + 0{,}05) = 21000$ €.

Interés compuesto
En el interés compuesto, el capital inicial va incrementándose con los intereses producidos (devengados) en los periodos anteriores de tiempo (anuales, semestrales, trimestrales…). Si los periodos son anuales, cada año se multiplicará por 1 + r; así, los capitales en años sucesivos serán:

$$C_0,\ C_1 = C_0(1+r),\ C_2 = C_0(1+r)^2,\ C_3 = C_0(1+r)^3 \ldots\ C_t = C_0(1+r)^t,$$

siendo t el número de años.

- Si los intereses se abonan (se pagan) en periodos más cortos (semestrales: dos veces al año; trimestrales: cuatro veces al año; …), el capital acumulado al cabo de t años, a una tasa de interés anual r (en tanto por uno), será: $C(t) = C_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, siendo n el número de periodos anuales.

Ejemplos:
Un capital de 20000 €, al 6 % anual, se convierte al cabo de 8 años en 31876,96 €.
Año a año:

$$C_0 = 20000 \text{ €};\ C_1 = 20000 \cdot (1{,}06) = \underline{21200} \text{ €};\ C_2 = \underline{21200} \cdot (1{,}06) = 20000 \cdot (1{,}06)^2 = \underline{22472} \text{ €};$$

$$C_3 = \underline{22472} \cdot (1{,}06) = 20000 \cdot (1{,}06)^3 = 23820{,}32 \text{ € ... (cada año se multiplica por 1,06)} \to$$

→ Utilizando la potenciación: $C_8 = 20000 \cdot (1 + 0{,}06)^8 = 31876{,}96$ €.

- Si los intereses se abonan trimestralmente (n = 4), los 20000 € anteriores se convertirían, al cabo de esos mismos 8 años, en $C(8) = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{4 \cdot 8} = 20000 \cdot (1{,}\underline{015})^{32} = 32206{,}49$ €.

Observa: A un 6 % anual le corresponde con 1,5 % (= 0,015) trimestral; 8 años = 32 trimestres.

Interés continuo
Si se consideran periodos de tiempo infinitesimales, el interés se llama continuo: los intereses se van acumulando en cada instante de tiempo.
El capital acumulado al cabo de t años es: $C(t) = C_0 \cdot e^{rt}$.

Ejemplo:
A interés continuo del 5 %, durante 8 años, 10000 € se convierten en

$$C = 10000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 8} = 14918{,}25 \text{ €} \qquad \to e = 2{,}7182\ldots \text{ es el número de Euler.}$$

Tasa anual equivalente: T.A.E.
Cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año (mensuales, por ejemplo), los intereses producidos (o devengados) por un capital son superiores a la tasa de interés anual. El porcentaje de interés real que se obtiene (o paga) se llama tasa anual efectiva o tasa anual equivalente: T.A.E. (Más detalles).

Ejemplo:
- 100 euros, a un interés del 6 % anual (tasa nominal se llama), producen al año 6 euros.
- Los mismos 100 €, al mismo interés del 6 % anual, con intereses liquidables mensualmente,

producen $C=100\cdot\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12}=106,1678$; esto es, una ganancia de 6,1678 euros. Esa ganancia es la misma que producirían 100 euros a un 6,1678 % de interés anual: es la T.A.E. correspondiente. En este caso, la información bancaria correcta debe ser: "intereses de un 6 %, (6,1678 % TAE)".

b) Cuando se pide un préstamo bancario es habitual que haya que pagar comisiones (gastos por trámites y demás). Así, si un banco te concede un préstamo de 3000 € al 9 % anual, pero ese crédito tiene unos gastos de 70 €, que el banco retiene al instante; entonces, recibes 2930 € (= 3000 – 70), pero debes devolver al cabo de un año 3000 + 9 % de 3000 = 3000 · 1,09 = 3270 €. ¿Qué TAE (el porcentaje real) se ha pagado?
Recuerda que $C_F=C\cdot(1+r)$. En este caso, se conoce C = 2930 y $C_F=3270$. Por tanto:

$$3270=2930\cdot(1+r)\Rightarrow 1+r=\frac{3270}{2930}\approx 1,116 \Rightarrow r=0,116 \to \text{La TAE es del } 11,6\ \%.$$

4. Amortización de préstamos

Cuando se pide un préstamo bancario de cierta importancia (para montar un negocio, comprar un coche o una casa), la deuda se paga (amortiza) en varios años, devolviendo el dinero a plazos (mensuales, trimestrales, anuales; si esas cantidades se pagan anualmente, se llaman anualidades).
- La cantidad de amortización (la que se paga en cada plazo) incluye una parte del capital adeudado más los intereses de la deuda pendiente desde el pago anterior.

Ejemplo:
Empecemos con un caso relativamente frecuente en los últimos tiempos. Supongamos que vas al dentista y terminas con una factura de 360 €, que pagas con tarjeta de crédito; al instante puedes recibir un mensaje de tu banco que dice: "El pago de 360 € puede realizarlo en tres cuotas mensuales de 124,83 €".
Si haces cuentas, ves que no se paga mucho más, pues 360/3 = 120 €; si pagas 124,83 €, supone un recargo de 4,83 € más al mes. Pero si te preguntas a qué interés te *facilitan* el pago, es posible que pienses que es demasiado. Te adelanto que el préstamo te lo dan a un 24 % de interés nominal, lo que supone un 2 % mensual.
Observa cómo evoluciona la amortización de la deuda de 360 €.
- Deuda inicial (primer mes): 360 €

360 € → después de 1 mes al 2 % se convierte en 360 · 1,02 = 367,2 € → 7,2 € de interés.
Pagas 124,83 €. De ellos, 7,2 € son de intereses; el resto, 116,63 €, de amortización.
- Deuda 2º mes: 367,2 – 124,83 = 242,37 €

242,37 € → después del 2º mes se convierte en 242,37 · 1,02 = 247,174 € → 4,804 € de interés.
Pagas 124,83 €. De ellos, 4,804 € son de intereses; el resto, 120,026 €, de amortización.
- Deuda 3º mes: 247,174 – 124,83 = 122,344 €.

122,344 € → después del 3er mes se convierte en 122,344 · 1,02 = 124,83 € → 2,486 €, interés.
Pagas 124,83 €. De ellos, 2,486 € son de intereses; el resto, 122,344 €, de amortización.
- Deuda amortizada.

Fórmula que da la cantidad de amortización

- La fórmula que da la <u>amortización mensual</u> (la cantidad a devolver) es $a=\frac{D(1+r)^n\cdot r}{(1+r)^n-1}$,

donde D es la deuda inicial, r la tasa mensual y n el número total de meses.

→ En general: $r=\frac{i}{p}$, $n = p\cdot t$, siendo: i, el interés anual en tanto por 1; p, el número de periodos anuales (en meses, $p = 12$; en trimestres, $p = 4$; anualidad, $p = 1$); y t, el número de años.

Ejemplos:

a) Si la deuda inicial fuese $D = 360$ € (la factura del dentista), el tipo de interés anual del 24 %, entonces, $r=\frac{0,24}{12}=0,02$ y $n = 3$ meses, aplicando dicha fórmula, se obtiene:

$a=\frac{360\cdot(1+0,02)^3\cdot 0,02}{(1+0,02)^3-1}=124,8316821$ €. → (Repite la operación con tu calculadora).

→ El proceso con la calculadora puede ser el siguiente:

360 $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{+}$ 0,02 $\boxed{)}$ $\boxed{\wedge}$ 3 $\boxed{\times}$ 0,02 $\boxed{:}$ $\boxed{(}$ 1,02 $\boxed{\wedge}$ 3 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 124.8316821

Los paréntesis son imprescindibles.

b) Si para comprar un coche necesitas un préstamo de 20000 € y lo financias a un interés del 9 %, a pagar en 4 años, mediante cuotas mensuales, entonces:

$D = 20000$ €, $r=\frac{0,09}{12}=0,0075$ (9 % anual = 0,75 % mensual) y $n = 48$ (4 años = 48 meses).

Aplicando dicha fórmula, se obtiene $a=\frac{20000\cdot(1+0,0075)^{48}\cdot 0,0075}{(1+0,0075)^{48}-1}=497,7008475\Rightarrow 497,70$ €.

Esto es, para saldar una deuda de 20000 €, al 9 % de interés nominal, hay que pagar 497,70 €, mensualmente, durante 4 años.

El proceso del pago de la deuda es el que se indica a continuación (doy solo unos pocos meses):

Mes	Deuda inicial en cada periodo	Deuda al cabo de un mes	Amortización	Pendiente tras amortización	Capital amortizado en ese mes	Intereses pagados en ese mes
		(Inicial × 1,0075)	(Pago de 497,70 €)			
1	20000	20150	497,7008475	19652,29915	347,7008475	150
2	19652,29915	19799,6914	497,7008475	19301,99055	350,3086039	147,3922436
3	19301,99055	19446,75548	497,7008475	18949,05463	352,9359184	144,7649291
...	...	...	...	...	...	...
13	15651,10162	15768,48489	497,7008475	15270,78404	380,3175853	117,3832622
...	...	...	...	...	...	...
25	10894,24658	10975,95343	497,7008475	10478,25258	415,9939981	81,70684937
...	...	...	...	...	...	...
37	5691,165727	5733,84947	497,7008475	5236,148623	455,0171045	42,68374296
...	...	...	...	...	...	...
46	1470,982843	1482,015214	497,7008475	984,3143669	486,6684762	11,03237132
47	984,3143669	991,6967247	497,7008475	493,9958772	490,3184897	7,382357752
48	493,9958772	497,7008463	497,7008475	0	493,9958784	3,704969079

<u>Observaciones</u>:

1) Estos cálculos se han realizado con **<u>Excel</u>**. (Ver desarrollo al final de este tema).

2) El capital "Pendiente tras amortización" es la "Deuda inicial en cada periodo".

3) Cada cuota incluye los intereses devengados más el capital amortizado en ese mes. Como la deuda va disminuyendo, los intereses bajan, mientras que la amortización va en aumento. (El primer mes se pagan 150 € de intereses; el último, 3,7049… €).

Hipotecas

Cuando un préstamo es cuantioso, como suele serlo al comprar una vivienda, los bancos lo conceden con la garantía de la misma propiedad, que queda hipotecada hasta que se completa el pago de dicho préstamo. La amortización de esa deuda suele ser mensual.

Si el tipo de interés se mantiene fijo a lo largo del tiempo, la cuota mensual se obtiene aplicando la fórmula anterior: $a=\dfrac{D(1+r)^n\cdot r}{(1+r)^n-1}$, donde D es la deuda inicial, r la tasa mensual y n el número de meses. (Retener esta fórmula no debería ser necesario; lo importante es saber el significado de la amortización, a (y saber calcularla con ayuda de herramientas informáticas: ver Problema 21).

Ejemplos:

a) Si el préstamo hipotecario es de 150000 €, a un interés del 4 % anual, a pagar durante 10 años, entonces: D = 150000 €, $r=\dfrac{0,04}{12}=0,00333...$ (4 % anual = 0,333… % mensual) y n =120 (10 años = 120 meses). Aplicando dicha fórmula, se obtiene:

$$a=\frac{150000\cdot(1,00333...)^{120}\cdot 0,00333...}{(1+0,00333...)^{120}-1}\to \text{(debes mantener todos los decimales en la calculadora)}$$

$$a=\frac{150000\cdot 1,490832682\cdot 0,00333...}{1,490832682-1}=\frac{745,333073}{0,490832682}=1518,677074\to 1518,68\text{ €/mes.}$$

Esto es, para saldar una deuda de 150000 €, hay que pagar 1518,68 €, mensualmente, durante 10 años. (En total, se pagan 120 cuotas de 1518,68 € = 182241,6 €).

b) Si no puedes afrontar un pago mensual tan alto (1518,68 € al mes es mucho dinero), puedes proponer al banco un alargamiento del tiempo de pago. Así, si el tiempo fuese de:

- 15 años, n = 180: $a=\dfrac{150000\cdot(1,00333...)^{180}\cdot 0,00333...}{(1+0,00333...)^{180}-1}$ = 1109,531888 → 1109,53 €/mes.
- 18 años, n = 216: $a=\dfrac{150000\cdot(1,00333...)^{216}\cdot 0,00333...}{(1+0,00333...)^{216}-1}$ = 975,296544 → 975,30 €/mes.

Planes de pensiones (planes de ahorro)

Es una modalidad de ahorro que consiste en ingresar cada cierto tiempo (mensualmente, trimestralmente, etc.) una cantidad de dinero en un banco, con la idea de disponer de una cierta suma de dinero para la jubilación. (Aquí supondremos que esa cantidad es fija y que el interés se mantiene fijo). Las cantidades ingresadas y sus ganancias quedan sujetas a interés compuesto. Al cabo del tiempo se tiene acumulado una cantidad de dinero C.

- La cantidad total que se obtiene al cabo de t años, a un interés i, con cuotas mensuales de M euros cada una, es $C=\dfrac{M\cdot(1+r)\left[(1+r)^{12t}-1\right]}{r}$, siendo r la tasa mensual en tanto por 1.

Nota: Esta fórmula debe adaptarse si las cuotas no son mensuales. Ver Problema 21.

Ejemplo:

Si se ingresan 150 € mensualmente, durante 25 años (300 meses) a un interés nominal del 3 % (esto es, $r=\dfrac{0,03}{12}=0,0025\to 1+r=1,0025$), la cantidad acumulada al cabo de esos 25 años será:

$$C=\frac{150\cdot 1,0025\cdot\left(1,0025^{300}-1\right)}{0,0025}=\frac{150\cdot 1,0025\cdot 1,115019558}{0,0025}=67068,43\ \text{€}.$$

5. Un paso adelante: uso de logaritmos

Si depositas una cantidad C_0 en un banco, a una tasa de interés anual r (en tanto por uno), al cabo de t años, tienes acumulado un total de $C_t = C_0(1+r)^t$.

Así, en páginas anteriores se ha visto que un capital de 20000 €, al 6 % anual, se convierte al cabo de 8 años en $C_8 = 20000 \cdot (1+0,06)^8 = 31876,96$ €.

En este contexto podríamos plantearnos otras cuestiones, como:

- ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el capital inicial se doble? (Alcance los 40000 €).
- ¿Cuál debe ser el tipo de interés para que, en esos 8 años, el capital acumulado se doble, o se triplique?

Para dar respuesta a esos problemas se necesita aplicar logaritmos; y resolver ecuaciones en las que intervengan los logaritmos.

Logaritmos: un repaso

El logaritmo de un número *x*, en una base *a*, es otro número *b* al que hay que elevar la base para que dé *x*. Con símbolos matemáticos se define como sigue: $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$.

Observaciones:

1. $\log_a x$ se lee *logaritmo en base a de x*, y significa que al número *x* se le asocia otro *b* que cumple de que $a^b = x$. Se trata, pues, de una transformación relacionada con la potenciación de base *a*, en la que “a cada número *x* se le asocia el exponente *b* preciso para que $a^b = x$”.

Por ejemplo, $\log_{10} 1000 = 3$, pues $10^3 = 1000$. Al revés, como $10^{-2} = 0,01 \Rightarrow \log_{10} 0,01 = -2$.

2. La base *a* debe ser positiva y distinta de 1. Las bases usuales son *a* =10 y *a* = *e*, siendo *e* el número de Euler: *e* = 2,7182… A los logaritmos en base 10 se les llama *decimales* o logaritmos comunes; los logaritmos en base *e* se llaman *neperianos* o naturales. Ambos se pueden hallar con la ayuda de una calculadora, con las teclas $\boxed{\text{log}}$ y $\boxed{\text{ln}}$, respectivamente; y no es necesario especificar la base. Así, $\log_{10} 2500 = \log 2500 = 3,397940$, y $\log_e 325 = \ln 325 = 5,783825$.

3. El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido, no existe. Esto es, $\log(-1000)$ carece de sentido. En estos casos, la calculadora da un mensaje de error.

Ejemplos:

a) Aplicando la definición puede verse que:

$\log_2 16 = 4$, pues $2^4 = 16$;	$\log_5 25 = 2$, pues $5^2 = 25$;	$\log_{10} 100 = 2$, pues $10^2 = 100$;
$\log 1 = 0$, pues $10^0 = 1$;	$\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$;	$\log 10^n = n$, para todo n;
$\ln e^5 = 5$;	$\ln e^n = n$, para todo n.	

b) Con calculadora:

log 87 = 1,939519... ;	ln 10 = 2,302585...;	log 0,00003 ≈ –4,5229 ;
ln 0,9 ≈ –0,1054;	log (–6) = ERROR;	ln 0 = ERROR.

Antilogaritmo

Es la transformación inversa del logaritmo. Esto es, si logaritmo de *A* = *b*, entonces antilogaritmo de *b* = *A*. Con símbolos: $\log A = b \Leftrightarrow \text{antilog } b = A$.

En algunas las calculadoras se indica $\log^{-1}$ y se halla pulsando, sucesivamente, las teclas SHIFT y log. (El antilogaritmo neperiano, $\ln^{-1}$, pulsando SHIFT ln).

Ejemplos:

a) antilog 3 = 1000; b) antilog 2,5 = 316,227766; c) antilog (–0,2) = 0,630957344.

(Escribo todos los números que aparecen en loa calculadora para que puedas comprobarlo).

¿Cómo se opera con los logaritmos?

Cuando haya que realizar operaciones con logaritmos o calcular el logaritmo de expresiones en las que los números estén sujetos a cualquiera de las operaciones habituales, pueden utilizarse las propiedades que se indican a continuación, en donde *A*, *B* y *n* son números o expresiones algebraicas.

1. $\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B$ 2. $\log_a A^n = n\log_a A$ 3. $\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$

El logaritmo transforma productos en sumas; potencias, en productos; cocientes, en restas.
(Si necesitas recordar más).

Ejemplos:

a) log 50 + log 20 = log (50 · 20) = log 1000 = 3. b) $\log(8\cdot x)=\log 8+\log x$.

c) $\log(1+0,05)^t = t\cdot\log(1+0,05)$. → Si se sabe que $\log(1+0,05)^t=3 \Rightarrow t\cdot\log(1+0,05)=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{\log 1,05}=\frac{3}{0,021189299}=141,5808985.$$

d) $\log\left(x^8\right)=8\cdot\log x$. → Si se sabe que $\log\left(x^8\right)=2\Rightarrow 8\cdot\log x=2\Rightarrow \log x=\dfrac{2}{8}\Rightarrow \log x=0,25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\log^{-1}(0,25)=\text{antilog }(0,25)=1,77827941.$$

e) $\log(1+r)^5=5\cdot\log(1+r)$. → Si se sabe que $\log(1+r)^5=0,3\Rightarrow 5\cdot\log(1+r)=0,3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log(1+r)=\frac{0,3}{5}=0,06 \Rightarrow 1+r=\log^{-1}(0,06)=\text{antilog }(0,06)=1,148153621 \Rightarrow r\approx 0,14815.$$

Aplicando logaritmos a problemas de interés

- Primer reto:

A una tasa de interés anual *r*, ¿cuánto tiempo tiene que pasar para que el capital inicial se doble?
→ Para el caso de un capital de 20000 €, al 6 % anual, que pase a ser de 40000 €.
Hay que resolver la ecuación: $C(t)=20000\cdot(1+0,06)^t=40000$ → simplificando: $(1+0,06)^t=2$.
Aplicando logaritmos:

$$\log(1+0,06)^t=\log 2 \Rightarrow t\cdot\log(1,06)=\log 2 \Rightarrow t=\frac{\log 2}{\log 1,06}=\frac{0,301029995}{0,025305865}\approx 11,9 \text{ años.}$$

Un capital de 20000 €, al 6 % de interés (compuesto) anual, se duplica en 11,9 años; poco antes de los 12 años. (No he redondeado los logaritmos para que lo compruebes por tu cuenta).
Puede comprobarse que si *t* = 11,9, $C(11,9)=20000\cdot(1+0,06)^{11,9}=40010,11$, algo más del doble.

- Segundo reto:

¿Cuál debe ser el tipo de interés para que, en esos 8 años, el capital acumulado se doble?
En este caso, hay que encontrar *r*, para que:

$$C(8)=20000\cdot(1+r)^8=40000 \to \text{simplificando: } (1+r)^8=2.$$

Aplicando logaritmos:

$$\log(1+r)^8=\log 2 \Rightarrow 8\cdot\log(1+r)=\log 2 \Rightarrow \log(1+r)=\frac{\log 2}{8}=\frac{0,301029995}{8}=0,037628749.$$

Aplicando antilogaritmos:

$$\log(1+r)=0,037628749 \Rightarrow 1+r=\text{antilog}(0,037628749) \Rightarrow 1+r=1,090507733$$

Luego $r\approx$ 0,090507733; lo que supone un tipo de interés del 9,0507733 %; redondeando, 9,05 %.
También puede comprobarse. A un tipo interés del 9,05 %, 20000 €, se convierten en 8 años, en:

$$C(8)=20000\cdot(1+0,0905)^8=20000\cdot(1,0905)^8=20000\cdot 1,999886549=39997,73 \text{ €, casi el doble.}$$

Ejercicios finales
Para afianzar estos conceptos pueden proponerse los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1
Se sabe que un empresario destina anualmente 5453,70 € para amortizar una deuda de 35000 €, a un tipo de interés nominal del 9 %. ¿Cuántos años son necesarios para ello?
Solución:

Sustituyendo en la expresión $a=\frac{D(1+r)^t\cdot r}{(1+r)^t-1}$ los valores dados, se tiene:

$$5453,70=\frac{35000\cdot(1+0,09)^t\cdot 0,09}{(1+0,09)^t-1}\Rightarrow 5453,70=\frac{3150\cdot(1,09)^t}{(1,09)^t-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5453,70\cdot\left[(1,09)^t-1\right]=3150\cdot(1,09)^t\Rightarrow 5453,70\cdot(1,09)^t-5453,70=3150\cdot(1,09)^t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5453,70-3150)\cdot(1,09)^t=5453,70\Rightarrow 2303,7\cdot(1,09)^t=5453,70\Rightarrow (1,09)^t=\frac{5453,70}{2303,7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,09)^t=2,367366\Rightarrow \log(1,09)^t=\log(2,367366)\Rightarrow t\cdot\log(1,09)=\log(2,367366)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{\log(2,367366)}{\log(1,09)}=10\rightarrow \text{Son necesarios 10 años.}$$

Ejercicio 2
Un banco concede créditos hipotecarios a un tipo de interés nominal del 4 %, durante 15 años. Una familia puede ahorrar 700 € al mes para pagar un crédito. ¿Cuál será la máxima cantidad que puede pedir prestada?
Solución:

Se sabe que: a = 700 €; t = 15 años, 180 meses; tasa mensual, $r=\frac{0,04}{12}=0,00333...$

Sustituyendo en la expresión anterior esos valores:

$$700=\frac{D(1+0,00333...)^{180}\cdot 0,00333...}{(1+0,00333...)^{180}-1}\Rightarrow 700=\frac{D\cdot 0,006068}{0,820301}\Rightarrow D=\frac{700\cdot 0,820301}{0,006068}=94.629,32$$

Podría pedir un máximo de 94629,32 euros.

Ejercicio 3
Una persona suscribe un plan de pensiones para su jubilación. El banco le ofrece un 3 % de interés nominal. Esa persona tiene ahora 35 años y supone que se jubilará a los 65. Si desea disponer de una cantidad de 100000 € al jubilarse, ¿cuánto deberá aportar mensualmente?
Solución:

Es un ejercicio similar al anterior. Aquí aplicaremos la fórmula $C=\frac{M(1+r)\left[(1+r)^{12t}-1\right]}{r}$, que es una variación de la anterior.

Con los datos que se tienen: t = 30 años, 360 meses; r = 0,03/12 = 0,0025 $\Rightarrow$

$$100000=\frac{M\cdot(1,0025)\left[(1,0025)^{360}-1\right]}{0,0025}\Rightarrow 100000=\frac{M\cdot 1,460484}{0,0025}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=\frac{100000\cdot 0,0025}{1,460484}=171,18.$$

Deberá aportar 171,18 euros al mes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál es el porcentaje de subida o de rebaja en cada uno de los siguientes supuestos?
a) Cristina ganaba 1580 € y le han subido a 1619,5 €. ¿Qué porcentaje le han subido?
b) Antonio viene muy contento porque una bicicleta que valía 680 € la ha conseguido, rebajada, por 374 €. ¿Qué porcentaje le han rebajado?
c) Carmen ha comprado un frigorífico que valía 1420 € pero le han rebajado 120 €. ¿Qué descuento le han hecho?

2. El sueldo de los trabajadores de una empresa va a subir un 2 %.
a) Indica los sueldos que percibirán tres trabajadores que ganan 3200, 1800 y 780 €.
b) Un trabajador gana después de la subida 2040 €. ¿Cuánto ganaba antes?

3. Los trabajadores de una empresa han tenido un aumento lineal de 100 € (a todos le han subido el sueldo 100 € al mes). Indica el aumento porcentual correspondiente a los siguientes sueldos mensuales: 3200, 1800, 780, 2000 euros.

4. Las rebajas anuncian un descuento del 40 %. Indica los precios rebajados de artículos cuyo precio actual es 100, 200, 32 y 40,40 €.

5. Un comerciante marca sus productos un 40 % más caro de lo que le cuestan. Después anuncia que todos sus productos están rebajados un 14 % sobre el precio marcado. ¿Cuál es su porcentaje de ganancias? ¿Cuánto ganó un día que ingresó 1200 € por ventas?

6. Un taller de reparación de automóviles sube los precios un 20 %, pero al cabo de un tiempo, decide bajarlos el 15 %. ¿Cuál es el porcentaje de variación entre el primer y último precio?

7. Una empresa familiar comercia productos agrícolas (venta por Internet). El primer año tuvo 45000 € de ingresos por ventas; el segundo año aumentó sus ingresos en un 170 %; y el tercer año, volvieron a subir sus ingresos en un 48 %. ¿Cuáles fueron sus ingresos en el segundo y tercer año? ¿Cuál ha sido el porcentaje acumulado del crecimiento por ventas al final del tercer año?

8. En la siguiente tabla se da la evolución de los precios (en €/kg) de dos productos de consumo, arroz y garbanzos, durante cinco años. Expresa la evolución en números índice.

Año	2009	2010	2011	2012	2013
Arroz	0,70	0,75	0,85	1,05	1,00
Garbanzos	0,95	0,90	1,10	1,50	1,70

9. El número de automóviles fabricados en España en los años que se indican se da en la siguiente tabla.

Año	2014	2015	2016	2017	2018
N.º de automóviles	2405597	2742316	2894230	2844678	2831320

Fuente: INE.
a) Expresa esos valores en números índice, tomando como referencia el año 2014.
b) Halla también la tasa de variación interanual en porcentajes.

10. El número de nacimientos en España en los años que se indican fue:

Año	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Nacimientos	471.999	454.648	425.715	427.595	420.290	410.583	393.181	369.302

Fuente: INE.
a) Expresa esos valores en números índice, tomando como referencia el año 2011.
b) Halla también la tasa de variación interanual en porcentajes.

11. Calcula el capital acumulado por 1500 euros durante 6 años a una tasa anual del 4 % a interés compuesto:
a) Anual. b) Trimestral. c) Mensual. d) Continuo.

12. ¿Cuál es la TAE correspondiente a un 8 % de interés nominal si los intereses se abonan mensualmente?

13. La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2 %. Si actualmente tiene 750000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener un millón?

14. En los primeros días del verano una determinada especie de mosquitos crece diariamente a un ritmo del 30 %. Si el primer día había 2000 mosquitos, ¿cuántos días han de pasar para que lleguen a 1 millón?

15. El 10 % de los lavavajillas que vende una determinada marca se estropea anualmente (esto es, de cada 100 lavavajillas que se venden, se estropean 10 el primer año; de los 90 restantes, se estropean 9 el segundo año; y así sucesivamente).
a) ¿Cuántos lavavajillas funcionaran bien al cabo de 5 años?
b) ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que queden en funcionamiento menos del 25 % de los lavavajillas vendidos?

16. Supongamos que el valor de mercado de un automóvil baja anualmente en un 15 %.
a) ¿Cuál será su valor al cabo de 4 años?
b) En cuantos años su valor será inferior al 40 % de lo costó nuevo?

17. Una empresa informática multiplicó por 37 su facturación en 5 años. Si suponemos que el crecimiento se dio de manera uniforme (con crecimiento porcentual igual año a año), ¿cuál fue su porcentaje de crecimiento anual?

18. Una motocicleta vale 3500 €. El vendedor facilita su adquisición a particulares financiando su compra a un tipo de interés nominal del 12 %, y permite su pago en 24 cuotas mensuales (la primera mensualidad se paga justo un mes después de la adquisición de la moto).
¿A cuánto ascenderá la cuota mensual?

Dato: La fórmula que da la amortización mensual es $a = \dfrac{D(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$.

- En este problema y en los que siguen puedes utilizar herramientas informáticas.

19. Una familia suscribe un préstamo hipotecario de 120000 euros. El banco les ofrece dicha cantidad a un 3,2 % anual por un período de 15 años. ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente? (Dato: fórmula del problema 18).

20. Para amortizar una deuda de 27000 €, a un tipo de interés nominal del 6 %, se abonan anualmente 4347,97 €. ¿Cuántos años son necesarios para ello? (Dato: fórmula del problema 18).

21. Una empleada de banca suscribe un plan de ahorro en las siguientes condiciones:
Ingreso trimestral de 400 €; durante 25 años; a un interés anual del 5 %.
¿Qué cantidad tendrá al cabo de esos 25 años?

Dato: $C = \dfrac{A\cdot(1+r)\left[(1+r)^{4\cdot t} - 1\right]}{r}$; A es la aportación periódica.

22. Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 10 años y a un 6 % de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo? (Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2019 a 2028; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2028). (Dato: adapta al caso la fórmula del problema 21).

23. ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 4 % de interés compuesto para reunir en 5 años 15000 euros? (Dato: adapta al caso la fórmula del problema 21).

HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS: EXCEL

El programa Excel facilita todo tipo de cálculos. Aquí lo vamos a utilizar para hallar la cuota de amortización de un préstamo.

- La fórmula que da la amortización mensual es $a = \dfrac{D(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$, donde D es la deuda inicial, r la tasa mensual y n el número de meses.

Esta fórmula puede programarse en Excel como sigue:

C2 =(B2*((1+(B3/B5))^(B4*B5))*(B3/B5))/(((1+(B3/B5))^(B4*B5))-1)

	A	B	C	D	E
1	Cálculo de la amortización				
2	Deuda, D	20000	497,7008475		Hay que situarse en C2 y escribir
3	Interés, i (tanto por 1)	0,09			la fórmula que se indica.
4	años, t	4			Los números pueden cambiarse,
5	períodos anuales (meses = 12)	12			adaptándolos al problema

Para amortizar una deuda de 20000 € en 4 años, a un interés del 9 %, mediante pagos mensuales, se obtiene una cuota de amortización de 497,7008475 €.

El proceso del pago de la deuda es el que se indica a continuación (doy solo unos pocos meses):

A	B	C	D	E	F	G
Mes: n	Deuda inicial en cada periodo: Bn	Deuda al cabo de un mes	Amortización	Pendiente tras amortización:	Capital amortizado en ese mes:	Intereses pagados en ese mes:
		Bn × 1,0075	497,70 €	Cn – 497,70	497,70 – Gn	Cn – Bn
1	20000	20150	497,7008475	19652,29915	347,7008475	150
2	19652,29915	19799,6914	497,7008475	19301,99055	350,3086039	147,3922436
3	19301,99055	19446,75548	497,7008475	18949,05463	352,9359184	144,7649291
4	18949,05463	19091,17254	497,7008475	18593,47169	355,5829378	142,1179097
5	18593,47169	18732,92273	497,7008475	18235,22188	358,2498098	139,4510377
6	18235,22188	18371,98605	497,7008475	17874,2852	360,9366834	136,7641641
7	17874,2852	18008,34234	497,7008475	17510,64149	363,6437085	134,057139
8	17510,64149	17641,9713	497,7008475	17144,27045	366,3710363	131,3298112
9	17144,27045	17272,85248	497,7008475	16775,15164	369,1188191	128,5820284
10	16775,15164	16900,96527	497,7008475	16403,26443	371,8872102	125,8136373
11	16403,26443	16526,28891	497,7008475	16028,58806	374,6763643	123,0244832

Nota: El uso de Excel requiere un estudio previo. No debe ser exigido a este nivel, pero hay que saber leer la secuencia de datos que se genera. (En la línea azul se indica el proceso seguido; Bn indica los números de la columna B; así: B1 = 20000; B2 = 19652,29915; …
Observa que B(n+1) = En; así: B4 = 18949,05463 = E3.