

## SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)  $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$

Da la interpretación geométrica de cada caso.

Solución:

a)  $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{despejando } y \text{ en } E1 \text{ y sustituyendo en } E2) \rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = y \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 3(2x + 4) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = -\frac{12}{7}$ .

Como  $y = 2x + 4 \Rightarrow y = 2 \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) + 4 = -\frac{24}{7} + 4 \Rightarrow y = \frac{4}{7}$ .

b)  $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \rightarrow (\text{sumando ecuaciones, despejando y sustituyendo}) \rightarrow$

$\rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \uparrow \Rightarrow -1 - 3y = -4 \Rightarrow y = 1$ .

c) Por el método de reducción:

$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow 2E1 \begin{cases} 4x - 6y = -8 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases} \rightarrow (\text{sumando ecuaciones}) \rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 4x - 6y = -8 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Como “se pierde” una ecuación, el sistema es compatible indeterminado.

Poniendo  $x$  en función de  $y$  (despejando en  $E1$ ):  $2x = -4 + 3y \Rightarrow x = -2 + \frac{3}{2}y$ .

Haciendo  $y = t$ , siendo  $t$  un número real, la solución puede darse así:  $\begin{cases} x = -2 + \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$ .

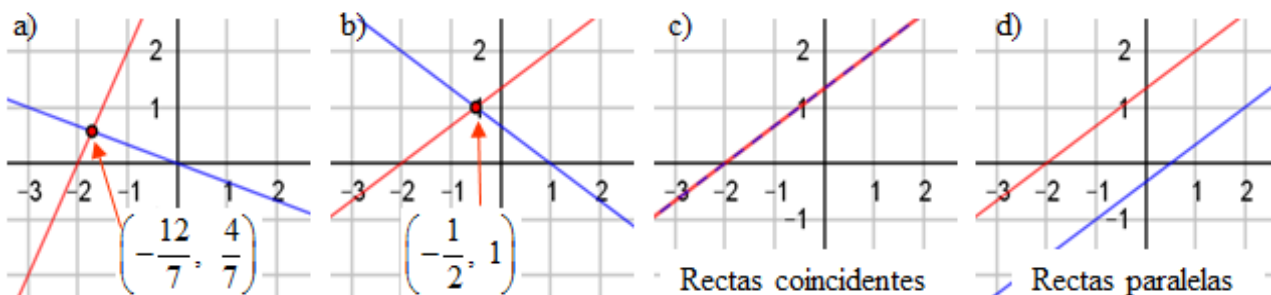
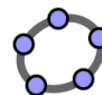
d) Por el método de reducción:

$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2E1 \begin{cases} 4x - 6y = -8 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases} \rightarrow (\text{restado ecuaciones}) \rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 4x - 6y = -8 \\ 0 = 10 \end{cases}$

Como se obtiene una “igualdad” falsa, el sistema es incompatible.

En las gráficas siguientes se da la interpretación geométrica pedida.

(Pueden representarse con [GeoGebra](http://www.geogebra.org))



2. Discute, en función de los valores del parámetro  $m$ , los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 4x + my = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ -2x + my = 4 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x + y = m \end{cases} \quad d) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ mx + y = m \end{cases}$$

Solución:

$$a) \begin{cases} 4x + my = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2E2 \begin{cases} 4x + my = 5 \\ -4x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 4x + my = 5 \\ (2+m)y = 13 \end{cases} \Rightarrow \text{(Despejando en la segunda ecuación)} y = \frac{13}{2+m}, \text{ que tiene sentido para cualquier valor de } m \neq -2.$$

Con esto:

- El sistema será compatible determinado siempre que  $m \neq -2$ . En caso contrario, para  $m = -2$ , el sistema será incompatible.
- Nunca es compatible indeterminado.

$$b) \begin{cases} x + 2y = -2 \\ -2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow 2E1 \begin{cases} 2x + 4y = -4 \\ -2x + my = 4 \end{cases} \Rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 2x + 4y = -4 \\ (4+m)y = 0 \end{cases}$$

Observado  $E2$ :

- Si  $m \neq -4$ , el valor de  $y$  siempre es 0. El sistema será compatible determinado.

Su solución:  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ .

- Si  $m = -4$ , queda  $0y = 0$ . La incógnita  $y$  puede tomar cualquier valor: SDI.

Solución:  $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = t \end{cases} \rightarrow$  (Se ha dado a  $y$  el valor  $t$  y despejado  $x$  en  $E1$ ).

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x + y = m \end{cases} \Rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2y = m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = -\frac{m+1}{2} \end{cases} \text{ Siempre será compatible determinado,}$$

pues  $y = -\frac{m+1}{2}$  puede calcularse para cualquier valor de  $m$ .

$$d) \begin{cases} -2x + y = 5 \\ mx + y = m \end{cases} \Rightarrow E2 - E1 \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ (m+2)x = m - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = \frac{m-5}{m+2} \end{cases} \Rightarrow \text{para } m = -2 \text{ la solución no tiene}$$

sentido; para ese valor de  $m$  el sistema será incompatible. En los demás casos, será compatible determinado.

3. Sea el sistema  $\begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -2x + my = 3 \end{cases}$ .

- Discútelo en función de los valores de  $m$ .
- Resuélvelo cuando  $m = -1$ .

Solución:

$$a) \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -2x + my = 3 \end{cases} \Rightarrow 2E2 \begin{cases} 4x - y = -5 \\ -4x + 2my = 6 \end{cases} \Rightarrow E2 + E1 \begin{cases} 4x - y = -5 \\ (2m-2)y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2m-2}$$

Con esto:

- Si  $m = 1$  el sistema es incompatible: la expresión  $y = \frac{1}{2m-2}$  no tendrá sentido.

- Si  $m \neq 1$ , el sistema es compatible determinado.

b) Si  $m = -1$ , el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2E2 \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow E2 + E1 \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -4y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}; x = -\frac{11}{8}.$$

4. Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una con tres respuestas posibles de la que solo una es verdadera. El examen se puntúa así: pregunta acertada, suma 1 punto; pregunta fallada, resta 0,5; pregunta no contestada, 0 puntos. Si un examinado ha contestado 87 preguntas y obtenido una puntuación de 57, ¿cuántos aciertos tuvo?

Solución:

Sean  $x$  el número de aciertos e  $y$  el de fallos.

Puntos positivos:  $x$ ; negativos  $0,5y$ .

Puntuación del examen:  $x - 0,5y = 57$ .

Contesta 87 preguntas:  $x + y = 87$ .

Sistema:  $\begin{cases} x - 0,5y = 57 \\ x + y = 87 \end{cases} \rightarrow (\text{restando}) \rightarrow E2 - E1 \begin{cases} x - 0,5y = 57 \\ 1,5y = 30 \end{cases} \Rightarrow y = 20; x = 67.$

Tuvo 67 aciertos; y 20 fallos.

5. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?

Solución:

Sean  $x$  e  $y$  las edades de la madre y de la hija, respectivamente.

Se cumple que:  $x + y = 42$ .

La hija tendrá la edad de la madre dentro de  $x - y$  años. Su edad será de  $x$  años.

Entonces, la madre tendrá  $x + (x - y) = 2x - y$ .

La suma de ambas edades será 90, luego:  $2x - y + x = 90 \Rightarrow 3x - y = 90$ .

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 3x - y = 90 \end{cases} \Rightarrow 4x = 132 \Rightarrow x = 33 \text{ años} \rightarrow \text{La hija tiene } 42 - 33 = 9 \text{ años}$$

6. La suma de las dos cifras de un número es 12. Si sus cifras se intercambian, el número que resulta es 54 unidades menor. ¿Cuál es ese número?

Solución:

En el sistema decimal de numeración, el número formado por los dígitos  $ab$  ( $a$  decenas y  $b$  unidades), simboliza el valor  $10 \cdot a + b$ . Si se cambia el orden de las cifras se obtiene el número  $ba$ , cuyo valor es  $10 \cdot b + a$ .

Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 10a + b = 10b + a + 54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ 9a - 9b = 54 \end{cases} \rightarrow E2/9 \begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow E2 + E1 \begin{cases} a + b = 12 \Rightarrow b = 3 \\ 2a = 18 \Rightarrow a = 9 \end{cases}$$

El número inicial es 93.

Puedes comprobar que al cambiar sus cifras de orden se obtiene el número 39, que es 54 unidades menor que el primero.

7. Se mezclan dos tipos de café, A y B, cuyos precios respectivos son 4 €/kg y 5 €/kg.

- a) Si se quiere que la mezcla salga a 4,40 €/kg, ¿en qué proporción hay que mezclarlos?
- b) ¿Cuántos kilos de A hay que mezclar con 10 kilos de B para que la mezcla salga a 4,20 €/kg?
- c) ¿Cuántos kilos hay que mezclar de cada tipo para obtener 100 kg de mezcla a 4,60 € el kg?

Solución:

a) Si se toman  $x$  kg de A e  $y$  de B, se tiene:

Suma de precios por separado:  $4x + 5y$ .

Valor de la mezcla:  $4,40(x + y)$ .

Lo que se gasta debe ser igual a lo que se obtiene:

$$4x + 5y = 4,40(x + y) \Rightarrow 4x + 5y = 4,40x + 4,40y \Rightarrow 0,60y = 0,40x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{0,60}{0,40} = \frac{3}{2}$$

La proporción pedida es el cociente  $\frac{x}{y}$ . Hay que mezclarlos en la proporción 3 a 2: 3 kg de A por cada 2 kg de B.

b) Si se toman  $x$  kg de A y 10 de B, se tiene:

Suma de precios por separado:  $4x + 5 \cdot 10$ .

Valor de la mezcla:  $4,20(x + 10)$ .

Lo que se gasta debe ser igual a lo que se obtiene:

$$4x + 5 \cdot 10 = 4,20(x + 10) \Rightarrow 4x + 50 = 4,20x + 42 \Rightarrow 0,20x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{0,20} = 40$$

Hay que tomar 40 kg de B. (Comprueba que el resultado es correcto).

a) Si se toman  $x$  kg de A e  $y$  de B, se tiene:

Kilos de mezcla:  $x + y = 100$ .

Valor de la mezcla:  $100 \cdot 4,60 = 460$ , que debe ser igual a  $4x + 5y$ .

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 5y = 460 \end{cases} \rightarrow (\text{por reducción}) \rightarrow \begin{cases} 4E1 \\ 4x + 4y = 400 \\ 4x + 5y = 460 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ \begin{cases} 4x + 4y = 400 \\ y = 60 \end{cases} \end{matrix}$$

Hay que mezclar 40 kg de A con 60 kg de B. (Comprueba que el resultado es correcto).

8. Resuelve los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = 11 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E2 - 2E1 \\ E3 - 3E1 \end{matrix} \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 7y - 3z = 0 \\ 7y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E3 - E2 \\ \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 7y - 3z = 0 \\ -2z = 2 \end{cases} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \rightarrow x + \frac{9}{7} - 1 = 1 \rightarrow x = \frac{5}{7} \\ 7y - 3z = 0 \rightarrow 7y + 3 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{7} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 5y + z = -1 \\ 4y - 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E2 - E1 \\ E3 + 5E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 5y + z = -1 \\ 29y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 0 - 1 = 3 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \\ 0 + z = -1 \rightarrow z = -1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

c) Despejando  $z$  en  $E3$  y sustituyendo en las otras dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ x = z \uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 2y + z = 8 \\ 2z - y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z + 6 = 8 \Rightarrow z = 1 \\ y = -3 \uparrow \end{cases} .$$

La solución del sistema es:  $x = 1$ ;  $y = -3$ ;  $z = 1$ .

9. Resuelve el sistema  $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases} .$

Solución:

El sistema propuesto es homogéneo; se llaman así los sistemas cuyos términos independientes son todos 0. Es evidente que estos sistemas son siempre compatibles, pues al menos, tienen la solución  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ .

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ -3x + 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E3 - 3E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Como “se pierde” una ecuación, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{despejando } x \text{ en } E2 \text{ y haciendo } z = t) \rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases} .$$

10. En una reunión familiar hay 40 personas. La suma del número de hombres y de mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres excede en 6 a la suma del número de hombres más el número de niños. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión?

Solución:

Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$  el número de hombres, mujeres y niños, respectivamente.

Debe cumplirse que:

En total hay 40 personas:  $x + y + z = 40$ .

El número de hombres más el de mujeres, triplica al de niños:  $x + y = 3z \rightarrow x + y - 3z = 0$ .

Hay 6 mujeres más que entre hombres y niños:  $y = x + z + 6 \rightarrow x - y + z = -6$ .

Se obtiene el sistema:  $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = -6 \end{cases} .$

Puede resolverse por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - y + z = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 40 \\ -4z = -40 \\ -2y = -46 \end{cases} \Rightarrow z = 10; y = 23; x = 7.$$

En la reunión hay 7 hombres, 23 mujeres y 10 niños.

**11.** Un agricultor compra semillas de garbanzos a 1,30 € el kilo, de alubias a 1,20 € el kilo y de lentejas a 0,80 € el kilo. En total compra 45 kilos de semillas y paga por ellas 43 €. Sabiendo que el peso de las lentejas es el doble que lo que pesan, conjuntamente, los garbanzos y las alubias, calcular qué cantidad de semillas ha comprado de cada legumbre.

Solución:

Sean  $x, y, z$  los kilogramos comprados de garbanzos, alubias y lentejas, respectivamente.

Debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 45 && \rightarrow \text{compra 45 kg} \\ 1,30x + 1,20y + 0,80z &= 43 && \rightarrow \text{paga 43 €} \\ z &= 2(x + y) \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 13x + 12y + 8z = 430 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{(Pivotamos en } z) \rightarrow \begin{matrix} 8E1 \\ 8E3 \end{matrix} \begin{cases} 8x + 8y + 8z = 360 \\ 13x + 12y + 8z = 430 \\ 16x + 16y - 8z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 8x + 8y + 8z = 360 \\ 5x + 4y = 70 \\ 24x + 24y = 360 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E3 / 6 \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} 8x + 8y + 8z = 360 \\ 5x + 4y = 70 \\ 4x + 4y = 60 \\ -x = -10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Despejando y sustituyendo: } \begin{cases} 80 + 40 + 8z = 360 \Rightarrow z = 30 \\ 50 + 4y = 70 \Rightarrow y = 5 \uparrow \\ x = 10 \uparrow \end{cases}$$

La solución, en kilogramos, es:  $x = 10$  (garbanzos),  $y = 5$  (alubias),  $z = 30$  (lentejas).

**12.** Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Solución:

Sean  $x, y, z$  los precios de un café, un refresco y un dulce, respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{Grupo 1: } 2x + y + 3z &= 8,40; \\ \text{Grupo 2: } 4x + y + 5z &= 13,80; \\ \text{Grupo 3: } x + 2y + 2z &= 7,50. \end{aligned}$$

Se obtiene un sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8,40 \\ 4x + y + 5z = 13,80 \\ x + 2y + 2z = 7,50 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 3z = 8,40 \\ 2x + 2z = 5,40 \\ -3x - 4z = -9,30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E3 + 2E2 \\ E3 + 2E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 3z = 8,40 \\ 2x + 2z = 5,40 \\ x = 1,50 \end{cases}.$$

Si  $x = 1,50 \Rightarrow z = 1,20; y = 1,80$ .

Un café cuesta 1,50 €; un refresco, 1,80 €; un dulce, 1,20 €.

13. En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,80 euros; cacao, 4 euros; almendras, 13 euros. En un día se fabrican 9000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25800 euros. ¿Cuántos kg se utilizan de cada ingrediente?

Solución:

Sean  $x, y, z$  los kilos de leche, cacao y almendras empleados, respectivamente.

Debe cumplirse:

$$x + y + z = 9000 \rightarrow \text{se fabrican 9000 kg;}$$

$$x = 2(y + z) \rightarrow \text{la proporción de leche es doble que la de cacao y almendras juntas;}$$

$$0,80x + 4y + 13z = 25800 \rightarrow \text{coste total de 25800 euros.}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 9000 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 0,80x + 4y + 13z = 25800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9000 \\ 3x = 18000 \\ -3,2x + 9z = -10200 \end{cases} \Rightarrow x = 6000.$$

Sustituyendo  $x = 6000$  en la tercera y en la primera ecuación, se obtiene:  $y = 2000$  y  $z = 1000$ . Se utilizan 6000 kg de leche, 2000 kg de cacao y 1000 kg de almendras.

14. Resuelve:  $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ .

Solución:

Se despeja  $y$  en  $E1$  y se sustituye en  $E2$ .

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x - 2x^2 - (9 + 4x^2 - 12x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo  $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 3/2 \end{cases}$ .

Si  $x = 1, y = \frac{3}{2}$ ; si  $x = \frac{3}{2}, y = 0$ .

15. Resuelve el sistema:  $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x^2 + 7 = 2y \end{cases}$ .

Teniendo en cuenta que las ecuaciones que interviene están asociadas a sendas parábolas, represéntalas y observa que se cortan en los puntos solución del sistema.

Solución:

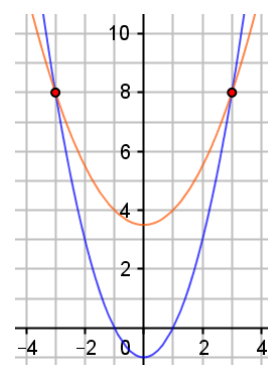
Sustituimos la  $y$  despejada de la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x^2 + 7 = 2(x^2 - 1) \end{cases} \rightarrow x^2 + 7 = 2x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Para ambos valores de  $x$ , se tiene que:  $y = 9 - 1 = 8$ .

Las soluciones son:  $(-3, 8)$  y  $(3, 8)$

La interpretación gráfica se da en la figura adjunta. (Dejo los detalles de la representación gráfica como tarea para el lector).



16. Resuelve el sistema 
$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$$
.

Solución:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Si  $x = -1$ ,  $y = 1 + 2 = 3$ . Solución: punto  $(-1, 3)$ .

Si  $x = 1$ ,  $y = 1 - 2 = -1$ . Solución: punto  $(1, -1)$ .

17. Halla las dimensiones de cada uno de los rectángulos que se indican:

a) El primer rectángulo tiene de perímetro 34 m y su diagonal mide 13 m.

b) El perímetro del otro rectángulo mide 100 m y su superficie 600 m<sup>2</sup>.

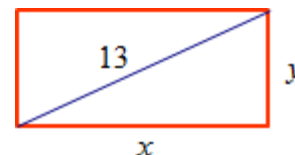
Solución:

a) Si sus lados tienen longitudes  $x$  e  $y$ , entonces:

- Su perímetro es  $p = 2x + 2y = 34 \rightarrow x + y = 17$ .

- Su diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos  $x$  e  $y$ ;

luego, por Pitágoras:  $x^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 169$



Se obtiene el sistema: 
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

Despejando  $y$  en  $E1$  y sustituyendo en  $E2$ :

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 17 - x \\ x^2 + (17 - x)^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169 \Rightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$  (simplificando y resolviendo a ecuación)  $\rightarrow$

$$x^2 - 17x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Si  $x = 12$  m,  $y = 5$  m; si  $x = 5$ ,  $y = 12$ . Es el mismo rectángulo, girado uno del otro.

b) Si se sabe que su perímetro es 100 m se obtiene la ecuación  $100 = 2x + 2y$ .

Si se parte de que su área es 600 m<sup>2</sup> se obtiene la ecuación  $600 = x \cdot y$ .

Así, puede formarse el sistema 
$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases}$$
.

Despejando  $y$  en  $E1$  y sustituyendo en  $E2$ :

$$\begin{cases} y = 50 - x \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ x(50 - x) = 600 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 2400}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2} = \begin{cases} 30 \\ 20 \end{cases}. \text{ Si } x = 30, y = 20; \text{ si } x = 20, y = 30.$$

Los valores  $x = 30$  e  $y = 20$  son la solución del sistema. (También valdría la solución  $x = 20$  e  $y = 30$ , correspondiente al rectángulo girado).