SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcula y simplifica:

a) $2\cdot(3x^2-5x-3)-3\cdot(4x^2-7x+6)$. b) $(3x^2-2x)\cdot(4x^2-5x-6)$.

c) $\left(2x^2-5x-3\right)\cdot\left(x^2-7x+6\right)$. d) $\left(\frac{3}{2}x^2-2\right)\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right)$.

Observación: En bastantes de los problemas de este tema puedes comprobar la solución con ayuda de alguna aplicación informática. La más rápida es **Photomath**.

Solución:

a) $2\cdot(3x^2-5x-3)-3\cdot(4x^2-7x+6) = \left(6x^2-10x-6\right)-\left(12x^2-21x+18\right) =$

$= 6x^2-10x-6-12x^2+21x-18 = -6x^2+11x-24$.

b) $(3x^2-2x)\cdot(4x^2-5x-6) = 3x^2\cdot\left(4x^2-5x-6\right)-2x\left(4x^2-5x-6\right) =$

$= 12x^4-15x^3-18x^2-8x^3+10x^2+12x = 12x^4-23x^3-8x^2+12x$.

c) $\left(2x^2-5x-3\right)\cdot\left(x^2-7x+6\right) = 2x^2\cdot\left(x^2-7x+6\right)-5x\cdot\left(x^2-7x+6\right)-3\cdot\left(x^2-7x+6\right) =$

$= 2x^4-14x^3+12x^2-5x^3+35x^2-30x-3x^2+21x-18 = 2x^4-19x^3+44x^2-9x-18$.

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-2\right)\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right)-2\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right) =$

$= 6x^4-\frac{15}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-8x^2+10x+1 = 6x^4-\frac{15}{2}x^3-\frac{35}{4}x^2+10x+1$.

2. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(3a+5)^2$. b) $(-2a+3)^2$. c) $\left(x^2+3\right)^2$. d) $\left(4x^2-1\right)^2+4x\left(2x-x^3\right)$.

Solución:

a) $(3a+5)^2 = (3a+5)\cdot(3a+5) = 3a\cdot(3a+5)+5\cdot(3a+5) = 9a^2+15a+15a+25 = 9a^2+30a+25$.

b) $(-2a+3)^2 = (3-2a)\cdot(3-2a) = 3\cdot(3-2a)-2a\cdot(3-2a) = 9-6a-6a+4a^2 = 4a^2-12a+9$.

En los dos que siguen, aplico las fórmulas.

c) $(x^2+3)^2 = (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 3+3^2 = x^4+6x^2+9$.

d) $\left(4x^2-1\right)^2+4x\left(2x-x^3\right) = 16x^4-8x^2+1+8x^2-4x^4 = 12x^4+1$.

3. Calcula y simplifica:

a) $\left(-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$. b) $4\cdot\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2\cdot(x+2)$.

Solución:

a) $\left(-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-3x+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right)+5x\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right)+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right) +$

$+ \left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot(-3x)+5x\cdot(-3x)+\frac{2}{5}\cdot(-3x)+\left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\frac{1}{2}+5x\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} =$

$= -\frac{2}{15}x^4+2x^3+\frac{4}{25}x^2+3x^3-15x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{5} = -\frac{2}{15}x^4+5x^3-\frac{2251}{150}x^2+\frac{13}{10}x+\frac{1}{5}$.

b) $4\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2(x+2) = 4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-3^2\right]-\left[\left(\frac{3}{4}x\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}x\cdot 1+1^2\right](x+2) =$

$= 4\left(\frac{x^2}{4}-9\right)-\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x+1\right)\cdot(x+2) == x^2-36-\left(\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x^2-3x+x+2\right) =$

$= x^2-36-\frac{9}{16}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x^2+3x-x-2 = -\frac{9}{16}x^3+\frac{11}{8}x^2+2x-38.$

4. Halla la división:

a) $\left(2x^3-3x+2\right):(2x-1)$.

b) $\left(4x^4-10x^3+10x^2-4x-5\right):\left(2x^2-x\right)$.

Solución:

a)

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^3 & & -3x+2 & 2x-1 \\ \cline{4-4}
-2x^3 & +x^2 & & x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4} \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -3x+2 & \\
 & -x^2 & +\frac{1}{2}x & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{5}{2}x+2 & \\
 & & +\frac{5}{2}x-\frac{5}{4} & \\ \cline{3-3}
 & & \frac{3}{4} &
\end{array}$$

Cociente: $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$. Resto: $\frac{3}{4}$.

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -10x^3 & +10x^2 & -4x & -5 & 2x^2-x \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^2-4x+3 \\ \cline{1-2}
 & -8x^3 & +10x^2 & & & \\
 & 8x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & -4x & & \\
 & & -6x^2 & +3x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x & -5 &
\end{array}$$

Cociente: $2x^2-4x+3$. Resto: $-x-5$.

5. Expresa cada una de las divisiones que se indican en la forma $\frac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$.

a) $\frac{x^2+3x-2}{x}$.

b) $\frac{3x^2-2x}{x+2}$.

c) $\frac{3x^2-12}{x^2+x}$.

d) $\frac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}=x+3-\frac{2}{x}$.

b) $\frac{3x^2-2x}{x+2} \to$

$$\begin{array}{rr|l}
3x^2 & -2x & x+2 \\ \cline{3-3}
-3x^2 & -6x & 3x-8 \\ \cline{1-2}
 & -8x & \\
 & 8x+16 & \\ \cline{2-2}
 & 16 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x+2}=3x-8+\frac{16}{x+2}$.

c) $\dfrac{3x^2-12}{x^2+x} \to \begin{array}{l|l} 3x^2 \qquad -12 & \underline{x^2+x} \\ \underline{-3x^2-3x} & 3 \\ \qquad -3x-12 & \end{array} \Rightarrow \dfrac{3x^2-12}{x^2+x} = 3 - \dfrac{3x+12}{x^2+x}$.

d) $\dfrac{x^3}{x^2-1} \to \begin{array}{l|l} x^3 & \underline{x^2-1} \\ \underline{-x^3+x} & x \\ \qquad x & \end{array} \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

6. Halla el cociente y el resto de la división:

a) $\left(-2x^4+3x^2-1\right):(x-3)$. b) $\left(2x^3-x^5-3x\right):(x+2)$.

Solución:

a) Como $-2x^4+3x^2-1=-2x^4+0x^3+3x^2+0x-1$, se forma el esquema:

	– 2	0	3	0	– 1
3		– 6	– 18	– 45	– 135
	– 2	– 6	– 15	– 45	– 136

El cociente es un polinomio de grado tres, con coeficientes – 2, – 6, – 15 y – 45. El resto vale – 136.

Luego: $C(x)=-2x^3-6x^2-15x-45$. Resto: –136

b) Para $\left(2x^3-x^5-3x\right):(x+2)$, se ordena como sigue:

$\left(-x^5+0x^4+2x^3+0x^2-3x+0\right):(x+2)$

Se forma el esquema:

	– 1	0	2	0	– 3	0
–2		2	– 4	4	–8	22
	– 1	2	– 2	4	– 11	22

El cociente es un polinomio de grado cuatro, con coeficientes – 1, 2, –2, 4 y –11. El resto vale 22.

Luego: $C(x)=-x^4+2x^3-2x^2+4x-11$. Resto: 22.

7. Halla el valor de k para que sea exacta la división $\left(x^3-3x^2+k\right):(x+2)$. Comprueba el resultado.

Solución:

Por el teorema del factor, la división será exacta cuando el valor numérico del dividendo para $x = –2$ sea 0; cuando $D(-2)=0$.

Como $D(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2+k=0 \Rightarrow -8-12+k=0 \Rightarrow k=20$.

8. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x)=-5x^2+x$. b) $P(x)=x^4+4x^2$. c) $P(x)=x^3-3x$. d) $P(x)=x^3+3x$

Solución:

Estas factorizaciones son muy sencillas. En casi todos los casos basta con sacar factor común y …

a) $P(x)=-5x^2+x=x(-5x+1)$ → las raíces del polinomio son $x = 0$ y $x=\dfrac{1}{5}$.

b) $P(x)=x^4+4x^2=x^2\left(x^2+4\right)$ → el segundo factor es irreducible.

c) $P(x)=x^3-3x=x\left(x^2-3\right)=x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\rightarrow$ observa que $x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

d) $P(x)=x^3+3x=x\left(x^2+3\right)\rightarrow$ el segundo factor es irreducible.

9. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{4x-8}{2x}$. b) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}$. c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$. d) $\dfrac{x^3+x}{2x^2}$.

Solución:

a) $\dfrac{4x-8}{2x}=\dfrac{4(x-2)}{2x}=\dfrac{2(x-2)}{x}$.

b) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}=\dfrac{3(x^2-4)}{x+2}=\dfrac{3(x+2)(x-2)}{x+2}=3(x-2)$.

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

d) $\dfrac{x^3+x}{2x^2}=\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{2x\cdot x}=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

10. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x)=3x^3-9x^2+6x$. b) $P(x)=8x^4+80x^3+200x^2$.

c) $P(x)=x^3-3x^2+4$. d) $P(x)=2x^3+5x^2-3x$

Solución:

a) $P(x)=3x^3-9x^2+6x\rightarrow$ Sacando factor común $3x$,

$P(x)=3x^3-9x^2+6x=3x\left(x^2-3x+2\right)$.

Resolviendo la ecuación $x^2-3x+2=0\rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$.

Los otros factores son $(x-1)$ y $(x-2)$.

Por tanto: $P(x)=3x^3-9x^2+6x=3x(x-1)(x-2)$.

b) $P(x)=8x^4+80x^3+200x^2\rightarrow$ Sacando factor común $8x^2$,

$P(x)=8x^4+80x^3+200x^2=8x^2\left(x^2+10x+25\right)$.

Resolviendo la ecuación $x^2+10x+25=0\rightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-100}}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5$, raíz doble.

Se repite dos veces el factor $(x+5)\rightarrow$ esto es, $(x+5)^2$.

Por tanto:

$P(x)=8x^4+80x^3+200x^2=8x^2(x+5)^2$

c) $P(x)=x^3-3x^2+4\rightarrow$ hay que buscar una raíz a "ojo". Se prueba entre los divisores de 4, que son: ±1, ±2, ±4.

Para $x=1$, $P(1)=2\rightarrow$ No es raíz.

Para $x = –1$, $P(-1)=0$ $\to$ Sí es raíz $\Rightarrow$ $(x + 1)$ es un factor $\Rightarrow$ $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$.

Se divide $P(x):(x+1)$ $\to$ se obtiene de cociente $c(x)=x^2-4x+4$

	1	–3	0	4
–1		–1	4	–4
	1	–4	4	0

Luego:

$$P(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)\left(x^2-4x+4\right) \Rightarrow P(x)=(x+1)(x-2)^2.$$

Los otros "dos" factores se hallan resolviendo la ecuación $x^2-4x+4=0$. Sus soluciones son $x = 2$ y $x = 2$ (2 es doble) $\Rightarrow$ $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

d) $P(x)=2x^3+5x^2-3x$.

Se saca factor y se resuelve la ecuación de segundo grado que resulta.

$$P(x)=x\left(2x^2+5x-3\right) \to 2x^2+5x-3=0:$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-5\pm7}{4}=\begin{cases}-3\\1/2\end{cases}.$$

Como las raíces son $x = –3$ y $x=\frac{1}{2}$, los factores correspondientes serán $x+3$ y $x-\frac{1}{2}$.

Luego, $P(x)=2x^3+5x^2-3x = x\left(2x^2+5x-3\right)=2\cdot x\cdot(x+3)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2-4x}{3x}$. b) $\frac{2x^2+4x}{x+2}$. c) $\frac{2x^3-4x^2(x-5)}{x^3}$. d) $\frac{x^3-2x^2-5x}{4x}$.

Solución:

a) $\frac{2x^2-4x}{3x}=\frac{x(2x-4)}{3x}=\frac{2x-4}{3}$ $\to$ también vale la solución: $\frac{2x^2-4x}{3x}=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$.

b) $\frac{2x^2+4x}{x+2}=\frac{2x(x+2)}{x+2}=2x$.

c) $\frac{2x^3-4x^2(x-5)}{x^3}=\frac{2x^2\left(x-2(x-5)\right)}{x^3}=\frac{2(-x+10)}{x}=\frac{-2x+20}{x}=-2+\frac{20}{x}$.

d) $\frac{x^3-2x^2-5x}{4x}=\frac{x\left(x^2-2x-5\right)}{4x}=\frac{x^2-2x-5}{4}=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$.

12. Halla, simplificando el resultado, las siguientes sumas y restas:

a) $3x-\frac{x^2-1}{x}$. b) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{3}{x}$. c) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{2}$. d) $\frac{x^2}{x+3}-x$.

Solución:

a) $3x-\frac{x^2-1}{x}=\frac{3x^2-\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$.

b) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{3}{x}=\frac{x^2\cdot x}{(x+1)x}-\frac{3\cdot(x+1)}{(x+1)x}=\frac{x^3-3\cdot(x+1)}{(x+1)x}=\frac{x^3-3x-3}{(x+1)x}$ → también puede operarse el denominador, pero no suele ser necesario. Es recomendable dejarlo así, pues se ve mejor si puede simplificarse la expresión.

c) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{2}=\frac{x^2(x-2)\cdot 2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}-\frac{2(x+1)\cdot 2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}+\frac{3x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=$

$=\frac{2x^3-4x^2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}-\frac{4x+4}{(x+1)(x-2)\cdot 2}+\frac{3x^3-3x^2-6x}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=\frac{2x^3-4x^2-4x-4+3x^3-3x^2-6x}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=$

$=\frac{5x^3-7x^2-10x-4}{2(x+1)(x-2)}$ → al dejar el denominador indicado es fácil ver que, en este caso, no puede simplificarse la expresión, pues ni $x = -1$, ni $x = 2$ son raíces del numerador. Por tanto, en el numerador no están los factores $(x+1)$ o $(x-2)$.

d) $\frac{x^2}{x+3}-x=\frac{x^2-x(x+3)}{x+3}=\frac{x^2-x^2-3x}{x+3}=\frac{-3x}{x+3}$.

13. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2$.

b) $\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)$.

c) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2:\left(\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)\right)$.

d) $\frac{2x}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{x}{1+x^2}$.

Solución:

a) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2=\left(\frac{2x+2-x}{x+1}\right)^2=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$ → Puede dejarse así; no es necesario desarrollar los cuadrados, salvo que se pida.

b) $\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)=\frac{2x+1+(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=\frac{2x+1+x^2-1}{x+1}=\frac{2x+x^2}{x+1}$.

c) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2:\left(\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)\right)=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}:\frac{x(x+2)}{x+1}=\frac{(x+2)^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}{x(x+1)^{\cancel{2}}\cancel{(x+2)}}=\frac{x+2}{x(x+1)}$.

d) $\frac{2x}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{2x}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=$

$=\frac{2x}{2(1+x^2)}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=0$.