LA INTEGRAL INDEFINIDA

Integral indefinida: Primitiva (antiderivada)

- **Primitivas** (*Antiderivadas*)

Dada la función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x)$. El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$ se llama integración o *antiderivación*.

$$F(x) \to \text{(derivación)} \to F'(x) = f(x) \to \text{(antiderivación)} \to F(x)$$

A la antiderivada de $f(x)$ se le llama **primitiva** de esa función. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplos:

- Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces: una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.

NOTA: Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando: $F(x) = (x^2 + 3x + 14)' = 2x + 3 = f(x)$. Todas la funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + c$, donde c es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$

- Si $F(x) = \ln(3x + 1)$, su derivada es $F'(x) = \dfrac{3}{3x+1}$; en consecuencia, una primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ será $F(x) = \ln(3x + 1)$.

NOTA: Como en el ejemplo anterior, todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x + 1) + c$ son primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$.

- **Integrales indefinidas**

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x) + c$, donde c es un número que se llama constante de integración. Se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad (dx \text{ indica la variable de integración})$$

En consecuencia, la derivada y la integral son "operaciones" inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \text{ y } \int\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)dx = f(x)$$

En la segunda igualdad debería sumarse una constante. No lo hacemos para que quede más clara la idea fundamental.

NOTA: Nos permitimos advertir que para poner integrar con cierto éxito es absolutamente necesario saber derivar muy bien. Si el lector no domina las técnicas de derivación debería reflexionar sobre el valor del tiempo antes de seguir adelante.

Ejemplos:

- $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3x + c\right) = 2x + 3$
- $\int \frac{3}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(\ln(3x+1) + c\right) = \frac{3}{3x+1}$

- **Propiedades de la integral indefinida**

(1) La integral de un número por una función es igual al número por la integral de la función:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Esto significa que los números que multiplican a una función pueden *entrar* y *salir* del integrando, según convenga. Así, por ejemplo: $\int f(x)dx = \frac{1}{k}\int kf(x)dx = k\int \frac{f(x)}{k}dx$.

(2) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Estas propiedades significan que la integral se comporta como un *operador lineal*.

Ejemplos:

- Número por función:

$\int 5(2x+3)dx = 5\int (2x+3)dx = 5(x^2 + 3x + c) = 5x^2 + 15x + c´$ (da igual poner c que $c´$).

OJO: Esta propiedad sólo se refiere a factores numéricos. Así:

$$\int x(2x+3)dx \neq x\int (2x+3)dx$$

- Suma de funciones:

$\int (2x+3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = (x^2 + c_1) + (3x + c_2) = x^2 + 5x + c$ (las constantes c_1 y c_2 no son necesarias; bastaría con poner una sola c).

- Las propiedades anteriores se utilizan según convenga, de dentro a fuera o de fuera a dentro. Así, por ejemplo:

$$18\int \frac{1}{3x+1}dx = 6\cdot 3\int \frac{1}{3x+1}dx = 6\int \frac{3}{3x+1}dx = 6(\ln(3x+1) + c) = 6\ln(3x+1) + c$$

Siempre se buscará un integrando del que sepamos hallar la primitiva.

Relación de integrales inmediatas

Conviene saber de memoria la integral de las funciones elementales. Las más usuales son las siguientes.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
Función simple	**Función compuesta**	**Ejemplos**
$\int k dx = kx$		$\int dx = x$; $\int (-2) dx = -2x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$; $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f}$	$\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} dx = \sqrt{x^3+1}$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f$	$\int \frac{3}{3x-5} dx = \ln(3x-5)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}$; $\int 4^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{4^{x^2}}{\ln 4}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$	$\int e^{4x} \cdot 4 dx = e^{4x}$; $\int e^{-x}(-1) dx = e^{-x}$
$\int \cos x dx = \text{sen } x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \text{sen } f$	$\int 3x^2 \cos(x^3-2) dx = \text{sen } (x^3-2)$
$\int \text{sen } x dx = -\cos x$	$\int f' \text{sen } f dx = -\cos f$	$\int 8x \,\text{sen } 4x^2 dx = \cos 4x^2$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tag } x$ $\int (1+\text{tag}^2 x) dx = \text{tag } x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \text{tag } f$ $\int (1+\text{tag}^2 f) \cdot f' dx = \text{tag } f$	$\int \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \text{tag } 3x$ $\int (1+\text{tag}^2 (5x-1)) \cdot 5 dx = \text{tag}(5x\text{-}1)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \text{arcsen } f$	$\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \text{arcsen } (\ln x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$	$\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arccos e^x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctag } x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \text{arctag } f$	$\int \frac{4}{1+(4x)^2} dx = \text{arctag } 4x$

NOTA: En todos los casos se omite (por falta de espacio) la suma de la constante de integración, *c*.

Ejemplos:

- $\int (3+x)^4 dx = \frac{(3+x)^5}{5} + c$
- $\int (2x^3-1)^5 \cdot 6x^2 dx = \frac{(2x^3-1)^6}{6} + c$
- $\int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$
- $\int (2x-3) e^{x^2-3x} dx = e^{x^2-3x} + c$
- $\int \frac{2x}{x^2+6} dx = \ln(x^2+6) + c$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx = sen\sqrt{x} + c$

Técnicas y métodos de integración

- **Descomposición elemental**

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas… (Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral).

Ejemplos:

- $\int \left(6x^2+5x-1\right)dx \to$ Se descompone en suma de integrales.

$$\int \left(6x^2+5x-1\right)dx = 2\int 3x^2dx + \frac{5}{2}\int 2xdx - \int dx \;=\; 2x^3+\frac{5}{2}x^2-x+c$$

- $\int \left(x^2-3\right)^2 dx \to$ Se hace el cuadrado de la expresión.

$$\int \left(x^2-3\right)^2 dx = \int \left(x^4-6x^2+9\right)dx = \int x^4dx - \int 6x^2dx + \int 9dx = \frac{x^5}{5}-2x^3+9x+c$$

- $\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx \to$ Se hace la división del integrando.

$$\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx = \int \left(5+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx = \int 5dx + 4\int \frac{1}{x}dx - 3\int x^{-2}dx = 5x+4\ln x+\frac{3}{x}+c$$

- $\int \frac{4}{5-6x}dx \to$ Se ajustan las constantes buscando la integral del logaritmo: $\int \frac{-6}{5-6x}dx$.

$$\int \frac{4}{5-6x}dx = 4\cdot\frac{-1}{6}\int \frac{-6}{5-6x}dx = -\frac{4}{6}\ln(5-6x)+c$$

- $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx \to$ Se observa que *puede* tener que ver con un arcotangente y un logaritmo,

pues: $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx = \int \left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{5}{1+x^2}dx + \int \frac{4x}{1+x^2}dx \;=$

$$= 5\int \frac{1}{1+x^2}dx + 2\int \frac{2x}{1+x^2}dx = 5\arctan x + 2\ln(1+x^2)+c$$

Ejemplo (Optativo):

- Para hallar $\int \sin^3 xdx$ hay que conocer algunas equivalencias trigonométricas. Hay que

saber que: $\sin^3 x = \left(\sin x\right)^3 = \left(\sin x\right)\left(\sin x\right)^2$; $\left(\sin x\right)^2 = 1-\left(\cos x\right)^2$.

(Naturalmente también se puede emplear la notación $\sin^3 x = \sin x\cdot\sin^2 x = \sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)$).

Por tanto:

$$\int \sin^3 xdx = \int \sin x\cdot\left(\sin x\right)^2dx = \int \sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx = \int \sin xdx + \int (-\sin x)\cos^2 xdx \;=$$

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ (En la 2ª integral se aplica la fórmula $\int f'\cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}+c$.)

- **Descomposición de fracciones racionales en fracciones simples**

Si la descomposición en fracciones no es tan fácil como las vistas en ejemplos anteriores, puede utilizarse el proceso que se describe a continuación.

Las fracciones racionales son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si el denominador es de grado menor o igual que el numerador, la expresión anterior puede escribirse así: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ y $R(x)$ son, respectivamente, el cociente y el resto de la división. (Como debe saberse, el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$)

Con esto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

La integral que puede presentar dificultades es la última. Vamos a resolverla en dos supuestos fáciles:

$$(1)\ \int \frac{m}{ax+b}dx \qquad (2)\ \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$$

- La integral (1) es inmediata (se resuelve por descomposición simple), pues:

$$\int \frac{m}{ax+b}dx = \frac{m}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x)\right) = \frac{m}{a}\ln(ax+b)+c$$

<u>Ejemplos</u>:

- $\displaystyle\int \frac{3}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\int \frac{7}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\ln(7x-4)+c$
- Para hallar $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx$ hay que dividir antes (el método de Ruffini es adecuado). Se obtiene:

$$\frac{2x^3-3x+2}{x+1} = 2x^2-5x+5+\frac{-3}{x+1}$$

De donde $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx = \int\left(2x^2-5x+5+\frac{-3}{x+1}\right)dx = \int\left(2x^2-5x+5\right)dx + \int \frac{-3}{x+1}dx$

Por tanto: $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - 3\ln(x+1)+c$

- Para resolver la integral (2) hay que determinar las raíces del denominador, $ax^2+bx+c=0$, y pueden darse tres casos:

1.º Hay dos raíces reales simples: $x = x_1$, $x = x_2$.
2.º Hay una sola raíz real doble, $x = x_1$.
3.º El denominador no tiene raíces reales.

– En el caso 1.º la descomposición que se hace es: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{a(x-x_1)} + \dfrac{B}{(x-x_2)}$

– En el caso 2.º se hace la descomposición: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{a(x-x_1)^2} + \dfrac{B}{(x-x_1)}$

– En el caso 3.º la descomposición es: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\dfrac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\dfrac{B}{1+(px+q)^2}$,

donde $ax^2+bx+c=1+(px+q)^2$

<u>Ejemplos</u>:

- <u>Caso 1.º</u> Para hallar la integral $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+x-2}dx$ se procede así:

– Se hallan las raíces de $x^2+x-2=0$. Son $x = 1$ y $x = –2$.

Por tanto, la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\ \Rightarrow\ 2x=A(x+2)+B(x-1)$$

– Calculamos A y B dando valores a x:

si $x = 1$: $2 = 3A \ \Rightarrow\ A = 2/3$

si $x = –2$: $–4 = –3B \ \Rightarrow\ B = 4/3$

También puede hacerse identificando coeficientes:

$$2x=A(x+2)+B(x-1)\ \Rightarrow\ 2x+0=(A+B)x+2A-B\ \Rightarrow\ \begin{cases}2=A+B\\0=2A-B\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}A=2/3\\B=4/3\end{cases}$$

– Con esto: $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+x-2}dx=\int\frac{2/3}{x-1}dx+\int\frac{4/3}{x+2}dx=\frac{2}{3}\ln(x-1)+\frac{4}{3}\ln(x+2)+c$

- <u>Caso 2.º</u> $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+4x+4}dx$

– Las raíces de $x^2+2x+4=0$ son $x = –2$, doble. Por tanto:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+4}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2}\ \Rightarrow\ x-2=A+B(x+2)$$

– Calculamos A y B dando valores a x:

si $x = –2$ $\Rightarrow$ $–4 = A \ \rightarrow\ A = –4$

si $x = 0$ $\Rightarrow$ $–2 = A + 2B \ \rightarrow\ B = 1$

– Con esto: $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+4x+4}dx=\int\frac{-4}{(x+2)^2}dx+\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{4}{x+2}+\ln(x+2)+c$

- <u>Caso 3.º</u> $\displaystyle\int\frac{2-x}{x^2+2x+2}dx$

– Se hace la descomposición: $\dfrac{2-x}{x^2+2x+2}=\dfrac{-\frac{1}{2}(2x+2)+3}{x^2+2x+2}=\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}+\dfrac{3}{1+(x+1)^2}$

Obsérvese que el numerador: $2-x=-\dfrac{1}{2}(2x+2)+3$;

y que el denominador: $x^2+2x+2=1+(x+1)^2$

– Por tanto: $\displaystyle\int\frac{2-x}{x^2+2x+2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+3\int\frac{1}{1+(x+1)^2}dx=$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+3\arctan(x+1)+c$$

NOTA: Este método de integración puede usarse para cualquier grado del denominador $Q(x)$, aunque su aplicación resulta más engorrosa. La mayoría de los libros de cálculo lo traen explicado.

Método de integración por partes

Si se hace la diferencial del producto de dos funciones, $u = f(x)$ y $v = g(x)$, se tiene:

$$d\left(f(x)\cdot g(x)\right) = d\left(f(x)\right)\cdot g(x) + f(x)\cdot d\left(g(x)\right) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

(Recuérdese que $df(x) = f'(x)dx$.)

Despejando: $f(x)g'(x)dx = d\left(f(x)\cdot g(x)\right) - f'(x)g(x)dx$.

Integrando miembro a miembro se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int d\left(f(x)\cdot g(x)\right) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx}.$$

Más escuetamente:

$$d(u\cdot v) = d(u)\cdot v + u\cdot d(v) = vdu + udv \Rightarrow udv = d(u\cdot v) - vdu\,) \Rightarrow \boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

NOTA: Para la elección de las partes *u* y *dv* no hay un criterio concreto; puede ser recomendable tomar *dv* como la parte más grande del integrando que se pueda integral con facilidad. El resto del integrando será *u*.

Ejemplo:

- Para integral $\int xsenxdx$ puede tomarse:

(1) $x = u$ y $\text{sen}\, x\, dx = dv \Rightarrow dx = du$ y $v = \int senxdx = -\cos x$

(2) $\text{sen}\, x = u$ y $x\, dx = dv \Rightarrow \cos x\, dx = du$ y $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$

(3) $x\text{sen}x = u$ y $dx = dv \Rightarrow (senx + x\cos x)dx = du$ y $v = \int dx = x$

Si se hace (1): $\int xsenxdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + senx + c$

Si se hace (2): $\int xsenxdx = senx\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cos xdx$ (La segunda integral es más complicada que la primera. Por tanto, esta partición no es acertada).

Si se hace (3): $\int xsenxdx = xsenx\cdot x - \int x(senx + x\cos x)dx$ (También la segunda integral es más complicada que la inicial. Tampoco es acertada esta partición).

Otros ejemplos:

- $\int xe^x dx$.

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$ $\quad$ $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

Se tiene: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

- $\int x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

Hemos tomado: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

- Para calcular $\int e^x \cos x \, dx$ hay que reiterar el método. Veamos:

Haciendo $u = e^x$ y $\cos x dx = dv$,

se tiene $du = e^x dx$, $v = \text{sen}\, x$ $\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x senx - \int e^x senx \, dx$.

La segunda integral, $\int e^x senx \, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = e^x$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = e^x dx$ y $-\cos x = v$

Luego,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x senx - \int e^x senx \, dx = e^x senx - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx \right)$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos x \, dx = e^x senx + e^x \cos x$$

Por tanto, $\int e^x \cos x \, dx = \dfrac{1}{2} e^x (\text{sen}\, x + \cos x) + c$

Ejercicios complementarios

Descomposición elemental

- $\int \dfrac{2x-5}{x^2+1} dx = \int \dfrac{2x}{x^2+1} dx - 5\int \dfrac{1}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) - 5\arctan x + c$
- $\int \dfrac{3x^5 - x^3 + 2x + 4}{x^2} dx = \int \left(3x^3 - x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} \right) dx = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2\ln x - \dfrac{4}{x} + c$

Fracciones simples

- $\int \dfrac{2}{1-x^2} dx = \left(\int \dfrac{1}{1-x} dx + \int \dfrac{1}{1+x} dx \right) = -\ln(1-x) + \ln(1+x) + c$
- $\int \dfrac{3+2x}{x^2+x-6} dx = \left(\int \dfrac{3/5}{x+3} dx + \int \dfrac{7/5}{x-2} dx \right) = \dfrac{3}{5}\ln(x+3) + \dfrac{7}{5}\ln(x-2) + c$
- $\int \dfrac{7x+2}{x^2-6x+10} dx = \dfrac{7}{2}\ln(x^2-6x+10) + 23\arctan(x-3) + c$

Integración por partes

- $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$
- $\int x^3 \cos x dx = x^3 senx + 3x^2 \cos x - 6xsenx - 6\cos x + c$
- $\int x \ln x dx = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{4} + c$

- **Cambio de variable**

La integral de la forma $\int f(u)du$ se puede escribir $\int f(g(x))g'(x)dx$, haciendo

$u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$

Esto es: $\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$,

Naturalmente, la segunda integral deberá ser más fácil; y una vez resuelta habrá que deshacer el cambio inicial.

<u>Ejemplos</u>:

- Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse:

$$u = 2x-3 \Rightarrow u^5 = (2x-3)^5 \text{ y } du = 2dx \to dx = \frac{1}{2}du$$

Con esto: $\int (2x-3)^5 dx = \frac{1}{2}\int u^5 du = \frac{1}{12}u^6 + c = \frac{1}{12}(2x-3)^6 + c$

- Para calcular $\int e^{4x}dx$, si se hace: $u = 4x \Rightarrow du = 4dx \to dx = \frac{1}{4}du$

Luego, $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

- La integral $\int \frac{4}{5-6x}dx$, hecha anteriormente, se puede resolver haciendo el cambio:

$$u = 5-6x \Rightarrow du = -6dx \to dx = -\frac{1}{6}du$$

Luego, $\int \frac{4}{5-6x}dx = \int \frac{4}{u}\left(-\frac{1}{6}du\right) = -\frac{4}{6}\int \frac{1}{u}du = -\frac{4}{6}\ln u + c - \frac{4}{6}\ln(5-6x) + c$

- Para hallar $\int x\sqrt{1+x}dx$ podemos hacer: $1 + x = u^2 \Rightarrow x = u^2 - 1$; $dx = 2udu$

Luego, $\int (u^2-1)u\cdot 2udu = \int (2u^4 - 2u^2)du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + c = \frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c$

NOTA: Dependiendo de la función que haya de integrarse puede hacerse un cambio u otro; muchos de ellos son estándar. Este texto no es el lugar para tratar de ellos. El lector interesado puede consultar una gran variedad de libros al respecto; entre otros:
Salas–Hille, Calculus, Ed. Reverté. Piskunov, Calculo diferencial e integral, Ed. Mir

- **Cambios de variable para integrales trigonométricas (Optativo)**

Los cambios más frecuentes son:

1. Si el integrando es una función $f(x)$ *impar* en cos *x*, se hace el cambio sen *x* = *t*.

(Una función es impar en cos x cuando al cambiar cos *x* por – cos *x* la expresión cambia de signo. Por ejemplo, $f(x) = \cos^3 x$.)

Así se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\text{sen } x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{1-t^2}\ ;\ tagx = \frac{senx}{\cos x} \Rightarrow tagx = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ejemplo:

- $\int \cos^5 x dx = \int (\cos^4 x)\cdot(\cos x dx) = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^4 dt = \int (1-t^2)^2 dt =$

$$= \int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = senx - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{1}{5}sen^5x + c$$

2. Si el integrando es una función $f(x)$ *impar* en sen *x*, se hace el cambio cos *x* = *t*.
(Una función es impar en sen *x* cuando al cambiar sen *x* por – sen *x* la expresión cambia de signo. Por ejemplo, $f(x) = sen^3 x$.)
Así se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\cos x = t \Rightarrow senx = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}\ ;\ tagx = \frac{senx}{\cos x} \Rightarrow tagx = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

$$\Rightarrow -senxdx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ejemplo:

- $\int sen^3 x \cos^2 x dx = -\int sen^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (-senx)dx = -\int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^2 dt = \int (1-t^2)t^2 dt =$

$$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

3. Si el integrando no cambia al sustituir sen *x* por – sen *x* y cos *x* por – cos *x*, se hace el cambio tag *x* = *t*.
Así se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\text{tag } x = t \Rightarrow 1 + tag^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow (1+tag^2 x)dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow tagx = \frac{senx}{\cos x} \Rightarrow senx = tagx \cdot \cos x \Rightarrow senx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ejemplo:

- Para integrar $\int tag^3 x dx$, haciendo tag *x* = *t* se tiene:

$$\int tag^3 x dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt$$

Esta segunda integral se hace por descomposición, pues dividiendo: $\frac{t^3}{1+t^2} = t - \frac{t}{1+t^2}$

Con esto, $\int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$

Deshaciendo el cambio inicial, se tiene:

$$\int tag^3 x dx = \frac{tag^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+tag^2 x) + c = \frac{tag^2 x}{2} + \ln(\cos x) + c$$