INTEGRAL IMPROPIA

Extensión del concepto de integral definida

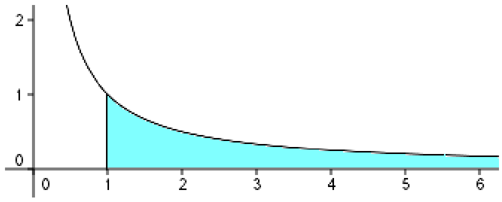
La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ requiere que:

1. El intervalo $[a, b]$ sea finito.
2. La función $f(x)$ esté acotada en el intervalo $[a, b]$.
3. La función $f(x)$ sea continua en dicho intervalo.

Cuando: (1) alguno de los límites de integración es infinito: $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ o $(-\infty, \infty)$ o (2) la función tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, b]$, la integral se llama impropia.

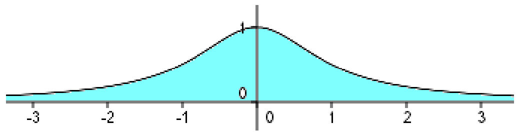
Son impropias:

1. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

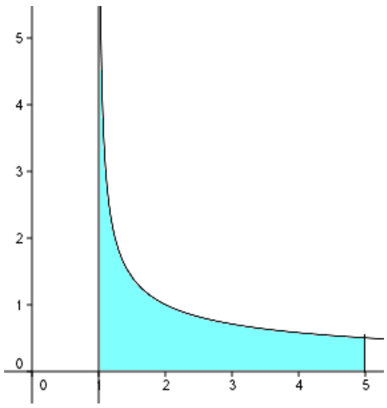


Su significado gráfico se corresponde con el área de la región sombreada en la figura adjunta. El intervalo de integración es $(1, +\infty)$: la "base" del recinto no está acotada. La curva es la de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

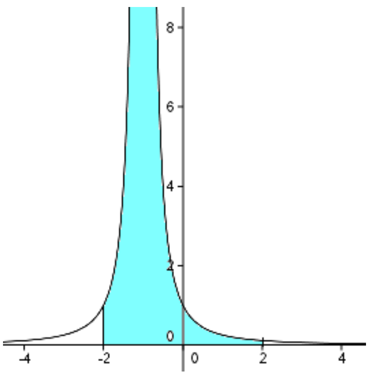
2. La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$



Gráficamente es el área de la región sombreada en la figura adjunta. El intervalo de integración es $(-\infty, +\infty)$. La curva es la de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.



3. La integral $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ da el área del recinto sombreado en la figura de la derecha. La función no es continua en el punto $x = 1$, el límite inferior; la "altura" del recinto no está acotada.



4. La integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ da el área de la región sombreada en la figura de la izquierda. La función $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ no es continua en el punto $x = -1$, que cae dentro del intervalo de integración.

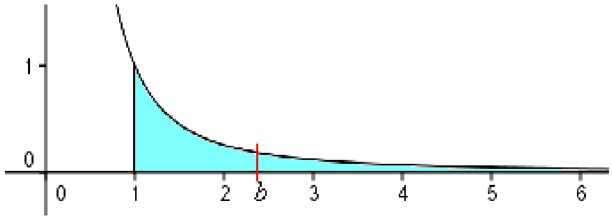
Nota: La integral (impropia o no) da un área cuando $f(x) \geq 0$ en el intervalo estudiado.

Cómo se calcula una integral impropia
El siguiente ejemplo puede aclarar el método general.

Ejemplo: Para hallar la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ que da el área sombreada en la siguiente figura, puede procederse como sigue:

1. Se calcula la integral definida $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}dx$ (el área desde 1 hasta b).

Su valor es: $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = -\frac{1}{b}+1$.



2. Resulta evidente que cuando b se hace más grande, el valor de $-\frac{1}{b}+1$ se aproxima más a 1; y cuando $b \to \infty$, el valor de $-\frac{1}{b}+1 \to 1$.

Por tanto, puede decirse que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$

- En general se procede como sigue:

Caso (1): Si la función $f(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, \infty)$, respectivamente, entonces se define:

A. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_a^t f(x)dx\right)$

B. $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(\int_t^b f(x)dx\right)$

C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, donde c es cualquier número real. Cada una de las integrales de la derecha se hacen como los casos A y B. Normalmente se toma $c = 0$.

Si los límites anteriores existen se dice que la integral impropia converge; en caso contrario, la integral diverge.

Ejemplos:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1$.

La integral hallada converge a 1. (El área bajo la curva vale 1).

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}(\ln x)\big|_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty}(\ln t - \ln 1) = [\ln\infty] = \infty$.

Esta integral es divergente. (El área bajo la curva es infinita).

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ = (la función es simétrica) = $2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

$$= 2\left(\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx\right) = 2\left[\lim_{t\to+\infty}(\arctan x)\Big|_0^t\right] = 2\left[\lim_{t\to+\infty}(\arctan t - \arctan 0)\right] = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Recuerda: $\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arctan(0) = 0$

Caso (2): Si la función $f(x)$ tiene alguna discontinuidad infinita puede definirse:

A. Si la función es continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\left(\int_a^t f(x)dx\right)$$

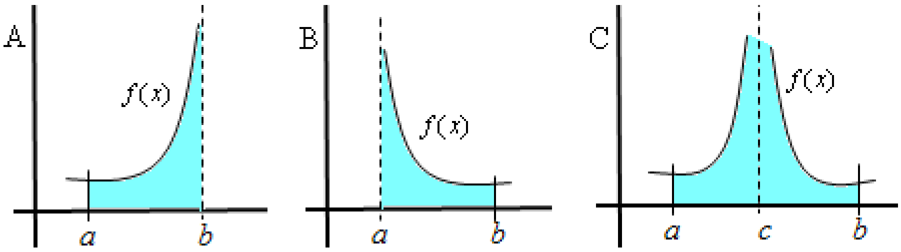
B. Si la función es continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\left(\int_t^b f(x)dx\right)$$

C. Si la función es continua en $[a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ (Estas dos integrales se hacen como en A y B.)

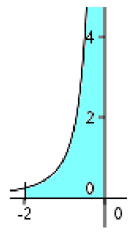
Las regiones anteriores son como las que se indican a continuación.



Ejemplos:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2}dx$. Como la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no es continua en $x = 0$, se tiene que

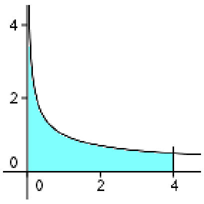
$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to0^-}\int_{-2}^{t}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-2}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right) = \infty .$$



Esta integral es divergente.

b) $\displaystyle\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. En este caso, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no está definida para $x < 0$; en $x = 0$, por la derecha, tiene una discontinuidad continua de salto infinito. Por tanto:

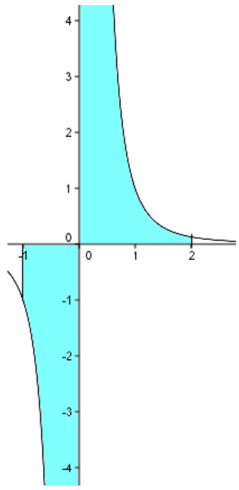
$$\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to0^+}\int_t^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx == \lim_{t\to0^+}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_t^4 = \lim_{t\to0^+}\left(2\sqrt{4}-2\sqrt{t}\right) = 2\cdot2 = 4 .$$



Esta integral converge a 4.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}dx$. En este caso, la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ tiene un salto infinito en el punto $x = 0$, que cae dentro del intervalo de integración.

Por tanto:



$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^-}\left(\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^3}dx\right)+\lim_{t\to 0^+}\left(\int_{t}^{2}\frac{1}{x^3}dx\right) =$$

$$\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{t}^{2} =$$

$= \lim\limits_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)+\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{2t^2}\right) = -\infty+\infty$. (Ninguna de las dos integrales converge.)

Notas:

- $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2}$.
- Si no se observa que la función es discontinua en x = 0, se podría haber calculado

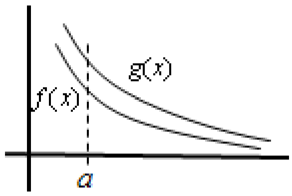
erróneamente que: $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^3}dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

Criterio de comparación para la convergencia

Si la integral impropia de la función $f(x)$ no puede hacerse por métodos convencionales, para determinar su convergencia o no puede recurrirse al siguiente criterio:

- Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas para todo $x \geq a$ y tal que

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.



Entonces, si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge; y,

además, $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Igualmente, si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ y si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Para comparar suele recurrirse a dos resultados conocidos:

1. A $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ cuya convergencia depende de *p*: a continuación se verá que es convergente si $p > 1$.
2. A $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$ que converge si $p > 0$.

- Estudio de la convergencia de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}x^{-p}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right)\Bigg|_1^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{(p-1)t^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\right) = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & \text{si } p>1\\ \infty, & \text{si } p\leq 1\end{cases}.$$

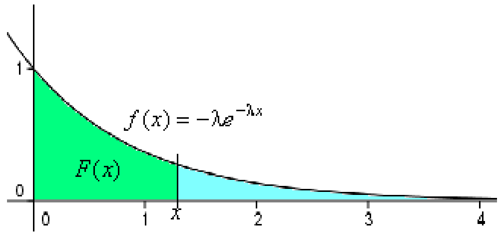
Observación: En estos apuntes ya se han estudiado los casos p = 1/3; 1/2, 1 y 2.

- Estudio de la convergencia de $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-px}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Bigg|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}.$$

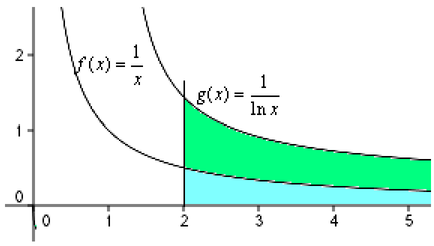
En particular: $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}+1\right) = 1$

En general, $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1$. Por lo tanto, $f(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ es una función de densidad para $\lambda >$ 0 y $x \geq 0$. La función de distribución exponencial de probabilidad asociada (que da la probabilidad de que la variable estadística tome valores menores o iguales t) es: $F(x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x} - 1$, que da el área bajo la curva desde 0 hasta x.



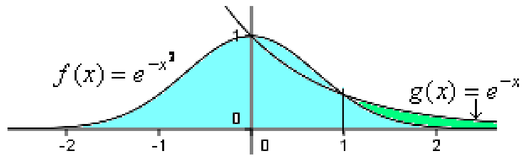
Ejemplos:

a) La integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}dx$ es divergente, pues $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge y $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$.



b) Como $e^{-x} \geq e^{-x^2}$, para todo $x \geq 1$, y la integral $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ es convergente, entonces $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ también es convergente.

Observación: La integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ está ligada a la distribución de probabilidad normal (campana de Gauss).



El valor de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ no puede determinarse por métodos elementales, pero la integral converge.