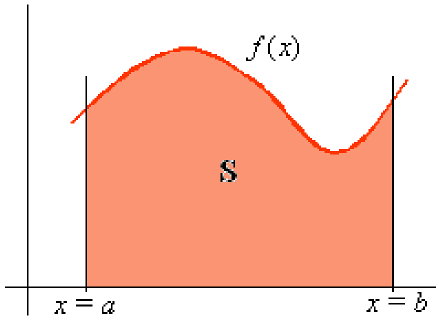
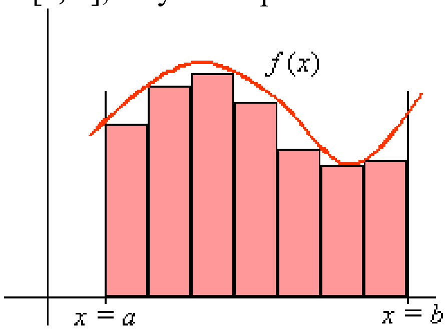
LA INTEGRAL DEFINIDA

Integral definida: área bajo una curva

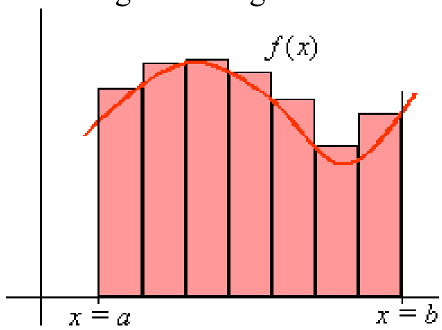
La integral definida permite calcular el área del recinto limitado, en su parte superior por la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa, en su parte inferior por el eje *OX*, y en los laterales por las rectas $x = a$ y $x = b$. Esto es, el área S del recinto coloreado en la figura adjunta.



En la antigüedad esta área se calculaba, de manera aproximada, sumando las superficies de *muchos* rectángulos de base muy pequeña y de altura el mínimo (o el máximo) de la función en cada uno de los subintervalos en los que se divide el intervalo [*a, b*], tal y como puede observarse en las siguientes figuras.

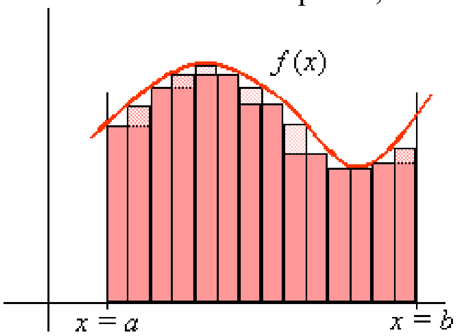


La suma de las áreas de los rectángulos "interiores" se llama suma inferior; puede denotarse por s_1. Evidentemente esta suma es menor que la superficie S: $s_1 < S$

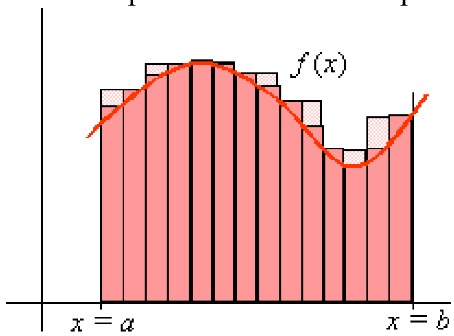


La suma de las áreas de los rectángulos "exteriores" se llama suma superior; puede denotarse por S_1. Evidentemente esta suma es mayor que la superficie S: $S < S_1$

Si se divide el intervalo en más partes, ambas sumas se aproximan más a la superficie real S.



En la suma inferior se *ganan* los trozos sombreados en color más claro. Si se denota por s_2 a esta suma se cumple que $s_1 < s_2 < S$



En la suma superior se *pierden* los trozos sombreados en color más claro. Si se denota por S_2 a esta suma se cumple que $S < S_2 < S_1$

Si este proceso de subdivisión se repitiese muchas veces, se obtendrían dos sucesiones, $\{s_i\}$ y $\{S_1\}$, una creciente y otra decreciente, que irían encajando la superficie buscada. Esto es:

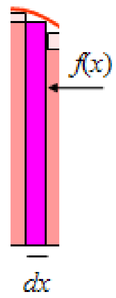
$$s_1 \le s_2 \le \ \dots \ \le s_i \dots \le S \le \dots \ S_i \le \dots \le S_2 \le S_1$$

Se trata, pues, de un proceso de paso al límite. Cumpliéndose que $lím\{s_i\} = S = lím\{S_i\}$.

Al valor de este límite se le llama **integral definida de *f*(*x*) entre *a* y *b*** y se escribe así: $\int_a^b f(x)dx$.

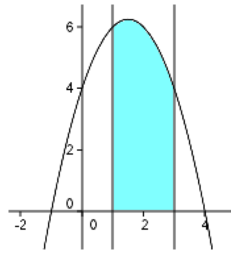
<u>Observaciones</u>:

1. El signo $\int$ es en realidad una ese (S de suma) estirada. Los números *a* y *b* son los límites (en el sentido de bordes) de integración. La función $f(x)$ se llama integrando. Así pues, $\int_a^b f(x)dx$ indica que hay que integrar (sumar) $f(x)$ desde el punto *a* hasta el punto *b*. El símbolo *dx* se lee diferencial de *x*, siendo *x* la variable independiente de la función *f*. Esta variable puede designarse con cualquier letra, por ejemplo *t*. Esto es, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.



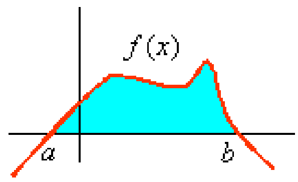
2. La expresión $f(x)\cdot dx$ puede considerarse el área del rectángulo señalado a la derecha, cuya base es *dx* y su altura, $f(x)$; ambos variables, con *dx* pequeña.
3. La integral así definida suele denominarse de Riemann.

<u>Ejemplo</u>:
La superficie sombreada en la figura adjunta, donde la gráfica es la de $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, viene dada por $\int_1^3 (-x^2 + 3x + 4)dx$



- **Un caso frecuente**

En muchos problemas suele pedirse calcular la superficie encerrada entre una curva $y = f(x)$ y el eje *OX*. En estos casos no se dan los extremos *a* y *b* del intervalo, sino que hay que determinarlos. Para ello, basta con resolver la ecuación $f(x) = 0$, pues *a* y *b* son los puntos de corte de la gráfica con el eje *OX*.



<u>Ejemplo</u>:
Si se desea calcular la superficie encerrada entre la curva $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y el eje *OX*, los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $-x^2 + 3x + 4 = 0$. (En la figura anterior se observa que esos puntos son -1 y 4).

Por tanto, el área pedida vendrá dada por la integral $\int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx$

<u>Propiedades de la integral definida</u>

Existen una serie de propiedades que permiten calcular el valor de la integral definida a partir de la integral indefinida. La más importante recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo integral,** siendo su aplicación más utilizada la llamada **regla de Barrow**.

Algunas de esas propiedades son:

1. La integral definida de un número por una función es igual al número por la integral de la función:

$$k\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k\cdot f(x)dx$$

En particular, $\int_a^b \left(-f(x)\right)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales definidas de cada una de esas funciones:

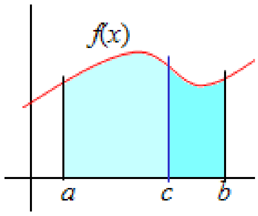
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. El intercambio de los límites de integración cambia el signo de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, se cumple que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



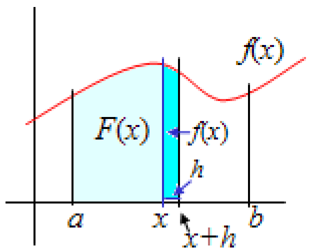
En el caso de $f(x) > 0$ en $[a, b]$, la interpretación de la integral como área permite una compresión inmediata de esta propiedad: el área desde *a* hasta *b* es igual al área desde *a* hasta *c* más el área desde *c* hasta *b*.

Teorema fundamental del cálculo integral

El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ se define como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es derivable en $[a, b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

<u>Aclaración</u>: Si se observa la figura adjunta, cuando $f(x)$ es positiva, la función $F(x)$ determina el área por debajo de la curva de $f(x)$ desde *a* hasta *x*.



Un apunte para la demostración de este teorema es lo que sigue.
Aplicando la definición de derivada a la función $F(x)$ se tiene que:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Y como $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt \to f(x) \cdot h$ (área del recinto estrecho señalado en la figura.)

Luego,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

- **Regla de Barrow**

Si $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, y conociendo que $F'(x)=f(x)$, cualquier otra primitiva, $G(x)$, de $f(x)$, se diferenciará de $F(x)$ en una constante; esto es, $F(x)-G(x)=c$. O lo que es lo mismo: $F(x)=G(x)+c$; o bien, $F(x)=\int_a^x f(t)dt=G(x)+c$, para todo x de su dominio.

Eligiendo los valores $x = a$ y $x = b$, se tendrá que:

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=G(a)+c;\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)+c$$

Como $F(a)=G(a)+c=0 \Rightarrow c=-G(a)$. Y por tanto, $F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$.

Por consiguiente, el valor de la integral definida es

$$\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a),\text{ siendo } G(x) \text{ cualquier primitiva de } f(x).$$

Resumiendo:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es $\int f(x)dx=F(x)$, entonces

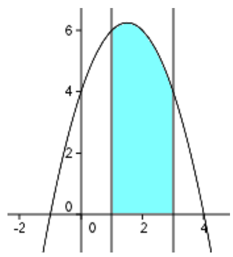
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Esta regla suele escribirse así:

$$\int_a^b f(x)dx=\left(F(x)\right)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\ \text{, siendo } F'(x)=f(x).$$

Ejemplo:

a) La superficie sombreada en la figura adjunta, donde $f(x)=-x^2+3x+4$, viene dada por la integral



$$\int_1^3(-x^2+3x+4)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Big|_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2+4\cdot 3\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2+4\cdot 1\right)=\frac{33}{2}-\frac{31}{6}=\frac{34}{3}$$

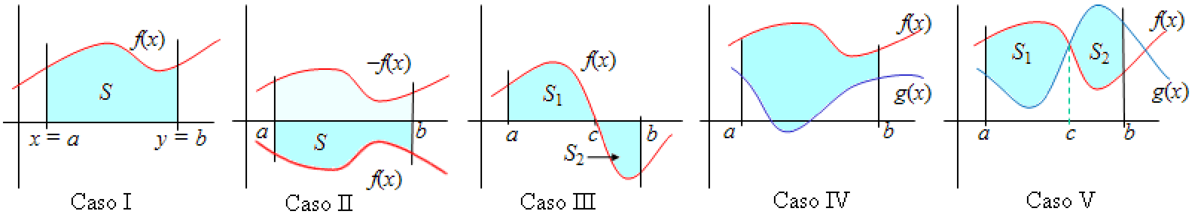
Nota. La unidad de medida de esta área será la correspondiente a cada caso: m^2, dam^2 o la que sea. Si suponemos que la variable x viene dad en cm, el resultado de este ejemplo sería 34/3 cm^2, respectivamente.

b) Conviene saber que la integral definida no siempre está relacionada con un área y que, por tanto, podría plantearse sin más, el cálculo de, por ejemplo: $\int_0^1\left(2-e^x\right)dx$.

Su valor es $\int_0^1\left(2-e^x\right)dx=\left(2x-e^x\right)\Big|_0^1=2-e-(0-1)=3-e$.

Aplicaciones al cálculo de áreas de recintos planos

Pueden presentarse los siguientes casos:



Caso I. La función $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo de integración.

El área S viene dada por: $S = \int_a^b f(x)dx$

El ejemplo a) visto anteriormente sirve de aclaración.

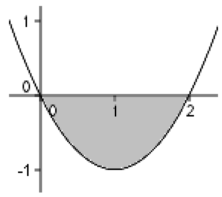
Caso II. La función es negativa en todo el intervalo de cálculo: $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Es evidente que el recinto por debajo del eje, limitado por $f(x)$ es y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual al recinto superior, limitado por $-f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo:

El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX viene dada por:



$$S = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Caso III. La función corta al eje OX en el intervalo de integración. El punto c, de corte, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

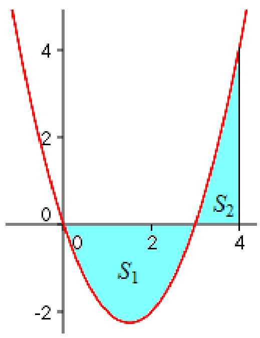
Ejemplos:

a) El área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$ y el eje OX, en el intervalo [0, 4] viene dada por:

$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx + \int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4 =$$

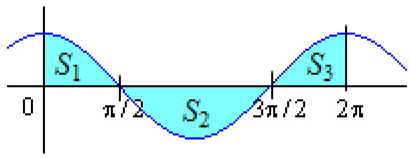
$$= -\left(9 - \frac{27}{2}\right) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = \frac{19}{3}.$$



Debe observarse que $f(x) = x^2 - 3x$ corta al eje OX en la abscisa $x = 3$; que la curva queda por debajo del eje OX entre 0 y 3; y por arriba del eje entre 3 y 4. Para ello resulta conveniente hacer una representación gráfica.

b) El área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje OX en el intervalo [0, 2π], viene dada por la suma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx$$



Por la simetría de la curva, el área es

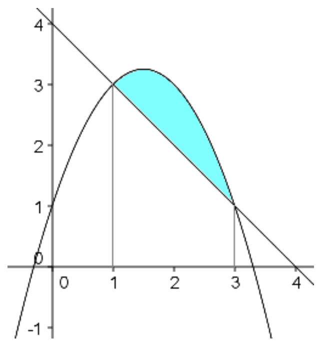
$$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 4 \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 4 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 4$$

<u>Caso IV</u>. Si el recinto viene limitado por dos curvas, con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx .$$

En particular, cuando se pretende hallar el área comprendida entre dos curvas, habrá que determinar las abscisas a y b: se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

<u>Ejemplo</u>: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x + 4$, que es el representado en la figura adjunta, viene dada por



$$S = \int_1^3 \left(-x^2 + 3x + 1 - (-x + 4) \right) dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Bigg|_1^3 = 0 - \left(-\frac{4}{4} \right) = \frac{4}{3} .$$

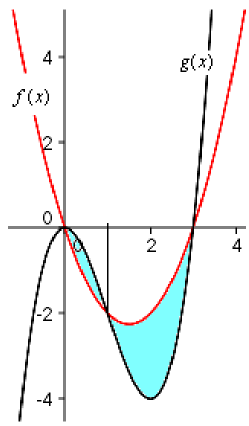
Los límites de integración, 1 y 3, se obtienen resolviendo la ecuación: $-x^2 + 3x + 1 = -x + 4$.

<u>Caso V</u>. Si las curvas se cortan en $c \in [a, b]$:

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c \left(f(x) - g(x) \right) dx + \int_c^b \left(g(x) - f(x) \right) dx$$

El punto c se halla resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

<u>Ejemplo</u>: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2$, que es el sombreado en la figura adjunta, viene dada por



$$S = \int_0^1 \left(\left(x^3 - 3x^2 \right) - \left(x^2 - 3x \right) \right) dx + \int_1^3 \left(\left(x^2 - 3x \right) - \left(x^3 - 3x^2 \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x \right) dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \left(-\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{37}{12}$$

Los puntos de corte de las curvas se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ $x^2 - 3x = x^3 - 3x^2$. Se obtienen: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. (Hay que ver qué curva va por encima.)

Otras aplicaciones de la integral definida

Como es sabido, dada una función total, derivándola se obtiene la función marginal. Así, si $C(x)$ es la función de coste total de x unidades de un determinado producto, su derivada $C'(x)=\dfrac{dC(x)}{dx}$ es la función de coste marginal, la tasa de variación instantánea de esa función.

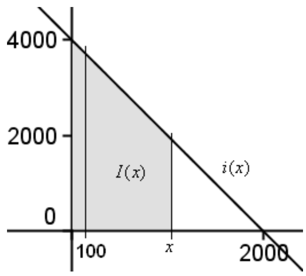
Como la integral es la *operación inversa* de la derivada, se entiende que, partiendo de la expresión que da la función marginal (la tasa de variación de cualquier fenómeno), puede hallarse, integrando, la función total. Siguiendo con el ejemplo anterior, si $C'(x)$ es la función de coste marginal se tendrá que la integral $\int C'(x)dx = C(x)+c$ es la función de coste total.

La constante c se determinará a partir de alguna condición inicial.

Ejemplo:

a) Si la función del ingreso marginal que tiene una compañía por la venta de un producto es $i(x)=4000-2x$, donde x es el número de unidades producidas y vendidas, entonces, la función de ingreso total del producto vendrá dada por

$$I(x)=\int(4000-2x)dx = 4000x-x^2+c$$



Como el ingreso por vender 0 unidades es nulo, se tendrá que $I(0)=c=0$.

Luego la función pedida será $I(x)=4000x-x^2$.

El ingreso total es el área (la del trapecio de altura x) bajo la curva de ingreso marginal (figura adjunta).

Si vende 100 unidades, el ingreso será $I(100)=400000-10000=390000$, que se corresponde con el área del trapecio estrecho.

b) Si el beneficio marginal de un empresario, por la fabricación de un determinado producto, viene dado por la función $b(x)=-x^2+120x-100$, siendo x el número de unidades producidas, el beneficio conseguido al aumentar la producción de 30 a 50 unidades viene dado por la integral

$$\int_{30}^{50}(-x^2+120x-100)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+60x^2-100x\right)\Bigg|_{30}^{50} = 103333{,}33-42000 = 61333{,}33.$$

c) Supóngase que la población de una determinada ciudad crece, desde el momento actual, a un ritmo determinado por la función $p(x)=50+40\sqrt{x}$, donde x viene dado en meses. Si la población actual es de 50000 habitantes: ¿cuál será la población dentro de un año?; ¿en cuánto aumentará su población durante el segundo año?

La función que determina la población es:

$$P(x)=\int\left(50+40\sqrt{x}\right)dx=\int\left(50+40x^{1/2}\right)dx = 50x+\frac{40}{3/2}x^{3/2}+c$$

Como en el momento actual, $x=0$, $P(0)=c=50000$, se tendrá que

$$P(x)=50x+\frac{40}{3/2}x^{3/2}+50000$$

La población dentro de un año, x = 12 meses, será $P(12)=50\cdot 12+\dfrac{4000}{3/2}\cdot 12^{3/2}+50000$ = 51708,5 ≈ 51709.

El aumento durante el segundo año, desde x = 12 hasta x = 24 meses, viene dado por la integral

$$\int_{12}^{24}\left(50+40\sqrt{x}\right)dx=\left(50x+\frac{40}{3/2}x^{3/2}\right)\Bigg|_{12}^{24}=4335{,}35-1708{,}51\approx 2627$$

Nota: La integral definida puede aplicarse para estudiar múltiples procesos económicos. Por ejemplo: problemas relacionados con la distribución de la renta; problemas de valor actual descontado… (Véase "Matemáticas para el análisis económico", Sydsaeter, 2ª ed, páginas 286 y ss y p. 310 y ss. También puede verse "Métodos fundamentales de economía matemática", Chiang, p. 468 y ss.)

- En el cálculo de probabilidades, si X es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[a, b]$, su función de densidad, $f(x)\geq 0$, cumple que $\int_a^b f(x)\,dx=1$.

La función de distribución de probabilidad, $F(x)$, que mide la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores desde a hasta x, $F(x)=P(a\leq X\leq x)$, es $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Ejemplo:
La variable aleatoria que mide el tiempo de espera en minutos para ser atendido en un *burger* depende de la función de frecuencia de clientes (la función de cuantía o de densidad). Si esta función es $f(x)=\dfrac{3}{1000}x^2$, con $0\leq x\leq 10$, se tendrá que:

Su función de distribución de probabilidad será $F(x)=\int_0^x \dfrac{3}{1000}t^2dt=\dfrac{x^3}{1000}$.

La probabilidad de tener que esperar entre 3 y 7 minutos, por ejemplo, viene dada por

$$P(3\leq X\leq 7)=\int_3^7\frac{3}{1000}x^2dx=\frac{x^3}{1000}\Bigg|_3^7=\frac{343}{1000}-\frac{27}{1000}=\frac{316}{1000}=0{,}316.$$