Tema 5. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVAS Y FÓRMULA DE TAYLOR

Aplicaciones de la derivada primera

El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de máximos y mínimos relativos.

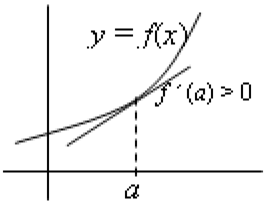
Crecimiento y decrecimiento

- $f(x)$ es creciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

Caracterización mediante la derivada primera

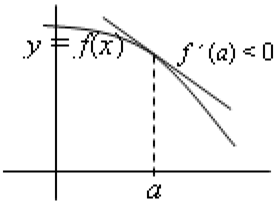
- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.

En general, si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.



- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente ese el intervalo.



Máximos. El punto x_1 es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:

x_1 es un máximo si: $f'(x_1^-) > 0$, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_1^+) < 0$

Mínimos. El punto x_2 es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:

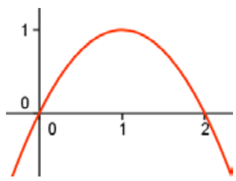
x_2 es un mínimo si: $f'(x_2^-) < 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_2^+) > 0$

Ejemplo:

La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es creciente a la izquierda del punto $x = 1$, y decreciente a su derecha, pues $f'(x) = -2x + 2$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Por tanto, $f(x) = -x^2 + 2x$ tiene un máximo en $x = 1$.

(Es evidente que $f'(1) = 0$).

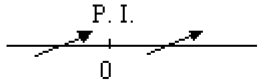


- La determinación de los puntos singulares (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también estacionarios; y los puntos en lo que la función no está definida) permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.

Advertencia. No siempre que $f'(x) = 0$ se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria.

- Puede haber mínimo sin que $f'(x) = 0$: Así, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.

- Puede suceder que $f´(x) = 0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$ Su derivada, $f´(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:



Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.

Trazado de gráficas con ayuda de la derivada primera

Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:

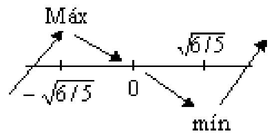
1. Determinar los puntos en los que no está definida $f(x) \to$ Dominio.
2. Hallar la derivada $f´(x)$.
3. Calcular las soluciones de la ecuación $f´(x) = 0$ (puntos singulares).
4. Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no está definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
5. Estudiando el signo de la derivada en cada intervalo anterior, determinar si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f´(x)$ es positiva o negativa.)
6. Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7. Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre ellos los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

<u>Ejemplo</u>: Trazado de la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^3$.

1. Está definida siempre.

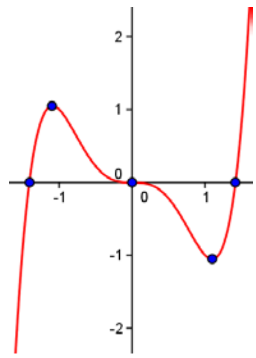
2 y **3**. $f´(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

4, **5** y **6**. Marcamos los puntos:



- Si $x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = -2$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-\sqrt{\frac{6}{5}} < x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\Rightarrow$ en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ hay máximo
- Si $0 < x < \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 1$), $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.
- Si $x > \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 3$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\Rightarrow$ en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ hay mínimo.

7. Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.



Para $x = 0$, $f(0) = 0 \to$ punto (0, 0).

Para $x = -\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1$, $f(-\sqrt{6/5}) \approx 1{,}05 \to$ punto (–1,1, 1,05)

Para $x = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1$, $f(\sqrt{6/5}) \approx -1{,}05 \to$ punto (1,1, –1,05)

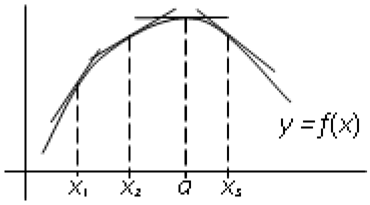
Los cortes con el eje *OX* son las soluciones de $x^5 - 2x^3 = 0$, que son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$ $\rightarrow$ puntos $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 0) y $(\sqrt{2}, 0)$.

Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura: concavidad y convexidad; inflexión

La concavidad y la convexidad dependen del punto de vista del que mira. Aquí se mirará siempre desde la parte negativa del eje *OY*. Por tanto, la concavidad será así: $\cap$; y la convexidad, así: $\cup$.

Observa lo que sucede en un intervalo de **concavidad**.

– Las tangentes a la curva están por encima de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez menor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes decrecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada decrece: $f'(x)$ es decreciente.
– En consecuencia, su derivada (la de $f'(x)$) será negativa: $f''(x) < 0$.

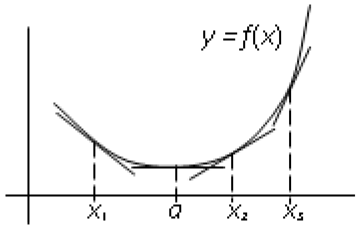


concavidad

– Los máximos se dan siempre en una concavidad.
– Por tanto, si en $x = a$ hay un máximo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) < 0$.

Observa lo que sucede en un intervalo de **convexidad**.

– Las tangentes a la curva están por debajo de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez mayor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes crecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada crece: $f'(x)$ es creciente.
– En consecuencia, su derivada (la de $f'(x)$) será positiva: $f''(x) > 0$.



convexidad

– Los mínimos se dan siempre en una convexidad.
– Por tanto, si en $x = a$ hay un mínimo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) > 0$.

Resumiendo:

Si $f''(x) < 0$ en el intervalo (x_1, x_2) $\Rightarrow$ $f(x)$ es cóncava en ese intervalo.

Si $f''(x) > 0$ en el intervalo (x_1, x_2) $\Rightarrow$ $f(x)$ es convexa en ese intervalo.

- **Máximos y mínimos**

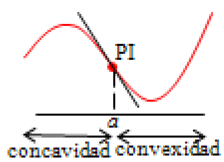
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un máximo en $x = a$.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$.

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f(x)$ tenga un máximo (o un mínimo) en $x = a$ siendo $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$ (sin que $f''(x) < 0$ o $f''(a) > 0$).

- **Puntos de inflexión**

Los puntos en los que la curva cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman puntos de inflexión; en esos puntos, la tangente corta a curva. Se cumple también que:



Si $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x)$ $\Rightarrow$ $f''(a) = 0$

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f''(a) = 0$ y en $x = a$ no haya punto de inflexión.

- **Criterio general para la determinación de puntos máximos, mínimos y de inflexión**

Si $x = a$ es un punto que cumple:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) = 0,\ \ldots\ f^{n-1)}(a) = 0 \text{ y } f^{n)}(a) \neq 0,$$

entonces:

Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo.

Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$, en $x = a$ hay un mínimo.

Si n es impar, en $x = a$ hay un punto de inflexión, aunque $f'(a) \neq 0$.

<u>Ejemplos</u>:

a) La función $f(x) = x^5 - 2x^3$, vista en el ejemplo anterior, cumple:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \text{ si } x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Los puntos x = 0, $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$, $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ son candidatos a máximos o mínimos.

Para decidirlo se hace la derivada segunda:

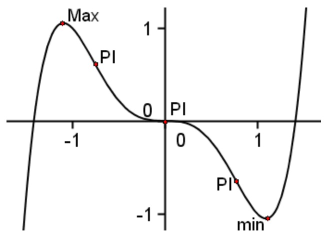
$$f''(x) = 20x^3 - 12x \Rightarrow 20x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 4x(5x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Como:

$f''(-\sqrt{6/5}) < 0$, en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ se da un máximo relativo

$f''(0) = 0$, en $x = 0$ se da un punto de inflexión.

$f''(\sqrt{6/5}) > 0$, en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ se da un mínimo relativo



Otros puntos de inflexión son $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ y $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

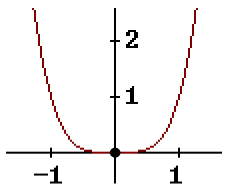
(Puede verse que $f'''(x) = 60x^2 - 12$ es $\neq 0$ en los tres puntos de inflexión indicados.)

b) La función $f(x) = x^4$, cumple:

$f'(x) = 4x^3 = 0$ en $x = 0$; $f''(x) = 12x^2 = 0$ en x = 0;

$f'''(x) = 24x = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 24 > 0 \Rightarrow$

en x = 0 se da un mínimo.

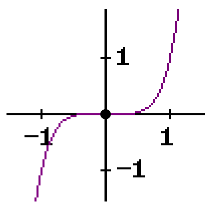


c) La función $f(x) = x^5$, cumple:

$f'(x) = 5x^4 = 0$ en $x = 0$; $f''(x) = 20x^3 = 0$ en x = 0;

$f'''(x) = 60x^2 = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 120x = 0$ en x = 0;

$f^{5)}(x) = 120 \Rightarrow$ en x = 0 se da un punto de inflexión.



Sugerencias para la representación gráfica de una función

Para representar una función $f(x)$, puede seguirse el esquema siguiente:

1. Determinar el dominio de definición y el recorrido de $f(x)$. (Estudio de posibles discontinuidades. Regiones: intervalos en los que $f(x)$ es positiva o negativa.)

2. Simetrías. Hay dos tipos de simetrías.

- Función par: $f(x)$ es simétrica respecto del eje *OY*. Se cumple que $f(-x) = f(x)$.
- Función impar: $f(x)$ es simétrica respecto del origen: Se cumple que $f(-x) = -f(x)$

3. Periodicidad. $f(x)$ es periódica de período p si $f(x+p) = f(x)$
En la práctica sólo se tiene en cuenta en las funciones trigonométricas.

4. Asíntotas. Puede haberlas verticales, horizontales y oblicuas

- Verticales. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ la recta $x = a$ es asíntota vertical $f(x)$
- Horizontales. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow$ la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.
- Oblicuas. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ $(m \neq 0$ y $m \neq \infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n$ $(n \neq \infty) \Rightarrow$
  la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$.

Es muy útil determinar, mediante el cálculo de límites laterales, la posición de la curva respecto de las asíntotas.

5. Puntos singulares e intervalos de variación y curvatura.

- Con la derivada primera, $f'(x)$: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Con la derivada segunda, $f''(x)$: Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

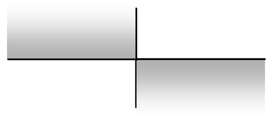
6. Determinar algunos puntos significativos de la curva $y = f(x)$.
Puntos máximos, mínimos y de inflexión. Puntos de corte de la curva con los ejes.

7. Trazado de la curva.
Todas *las piezas deben encajar*. En caso contrario habrá que revisar los cálculos realizados.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x) = \dfrac{6x}{1+x^2}$ se tiene:

– Dominio = **R**.

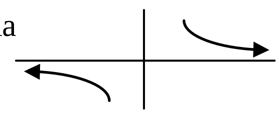


– Regiones (signo): por debajo del eje *OX* (negativa) si $x < 0$;
por encima de *OX* si $x > 0$.

– Simetrías. Es impar: $f(-x) = \dfrac{6(-x)}{1+(-x)^2} = -\dfrac{6x}{1+x^2} = -f(x)$

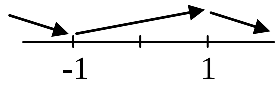
– Asíntotas. Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

La curva va por debajo de la asíntota cuando $x \to -\infty$; va por encima de la asíntota si $x \to +\infty$.



– Derivada primera: $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ $\Rightarrow$ se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

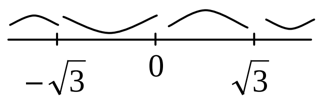
- Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.



En $x = -1$ hay mínimo; en $x = 1$ hay máximo.

– Derivada segunda: $f'(x)=\dfrac{12x(x^2-3))}{(1+x^2)^3}$ $\Rightarrow$ se anula en $x = 0$ y en $x=\pm\sqrt{3}$

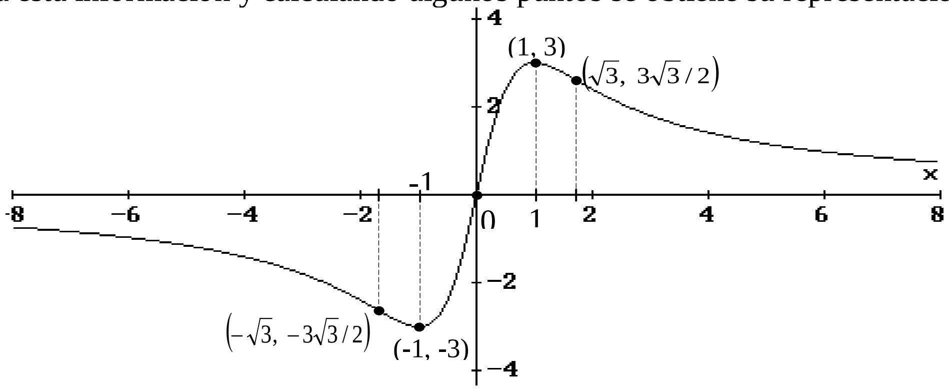
- Si $x<-\sqrt{3}$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Si $-\sqrt{3}<x<0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
- Si $0<x<\sqrt{3}$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Si $x>\sqrt{3}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).



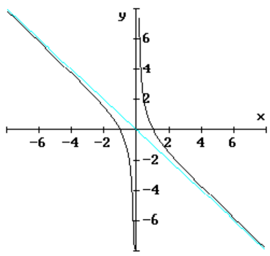
En los puntos $x=-\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x=\sqrt{3}$, la función cambia de curvatura: son puntos de inflexión.

También puede verse que $f''(-1) > 0$ y que $f''(1) < 0$, lo que confirma que en $x = -1$ haya un mínimo y en $x = 1$ un máximo.

Con toda esta información y calculando algunos puntos se obtiene su representación gráfica.



b) La función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ verifica:



– Dominio = **R** – {0}.

– Es impar: $f(-x) = -f(x)$

– En $x = 0$ tiene una asíntota vertical.

– Como $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

También puede verse que:

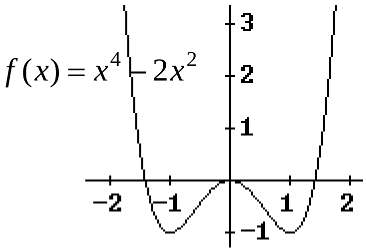
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=n$$

Derivadas: $f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{x^2}<0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.

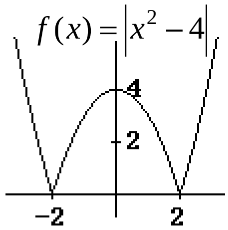
$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ $\Rightarrow f''<0$ si $x < 0$: cóncava ($\cap$); $f''>0$ si $x > 0$: convexa ($\cup$).

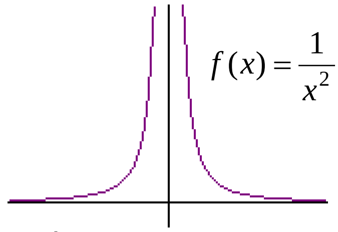
Representación gráfica de algunas curvas

Algunas de las gráficas siguientes se presentan con cierta frecuencia. En cada caso se indican algunos de sus elementos característicos. El lector sabrá completar el resto.

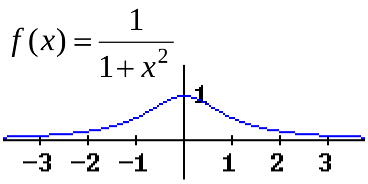


Máx: (0, 0); mín: (-1, -1), (1, -1)
PI: $x = -1/\sqrt{3}$, $x = 1/\sqrt{3}$

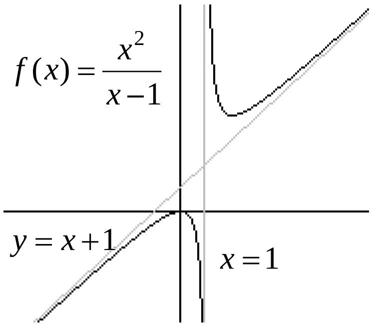


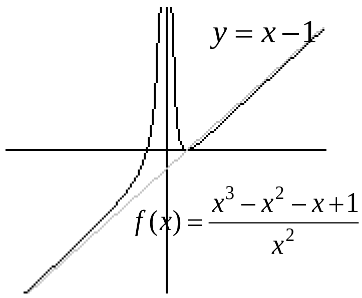


Asíntotas: x = 0; y = 0

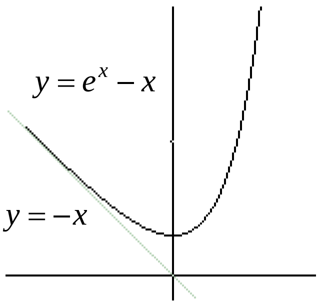


Asíntota: y = 0

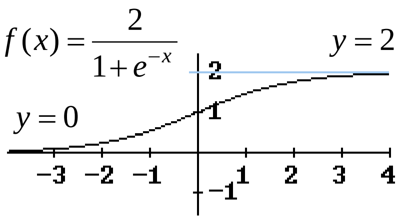




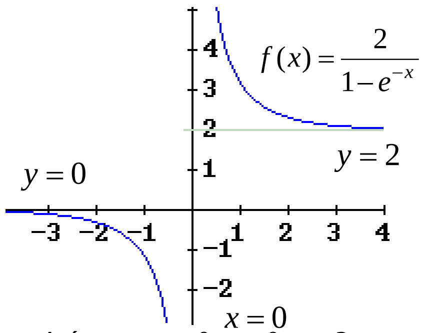
mín: (1, 0). PI: x = 3



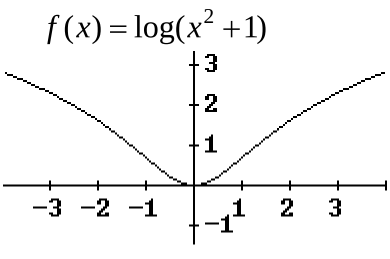
mín: (0, 1).



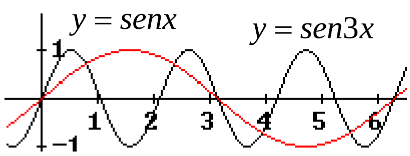
PI: x = 0
Asíntotas: y = 0; y = 2



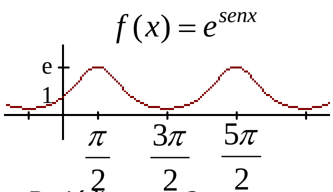
Asíntotas: x = 0; y = 0; y = 2



min: (1, 0). P.I.: x = -1, x = 1



sen 3x, Periódica: p = 2π/3



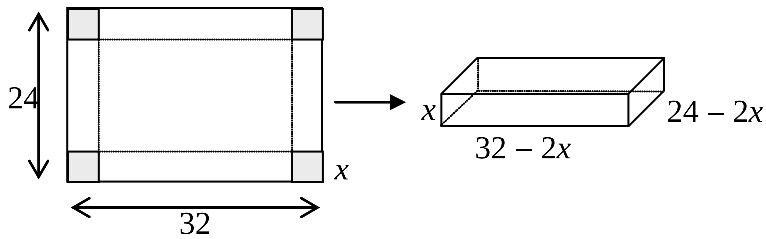
Periódica: p = 2π

Otra aplicación: Problemas de optimización
La optimización es uno de los problemas económicos más interesantes de resolver. Aquí se estudiará uno de los planteamientos más sencillos. Se verá con un ejemplo.

Ejemplo:
Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:
1. Determinar el objetivo del problema: lo que hay que hacer máxima o mínima.
En el ejemplo anterior el objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*

2. Expresar en forma de función tal objetivo.
La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura.
Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen de la caja obtenida será:

$$V = (32-2x)(24-2x)x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

3. Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.

$$V' = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \text{ (se ha simplificado)}$$

Se obtienen $x \approx 4{,}53$ y $x \approx 14{,}14$.

4. Para ver cuál de ellos es el máximo se hace $V'' = 24x - 224$ y se evalúa en esas soluciones. Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para $x = 4{,}53$. Esta es la solución buscada.

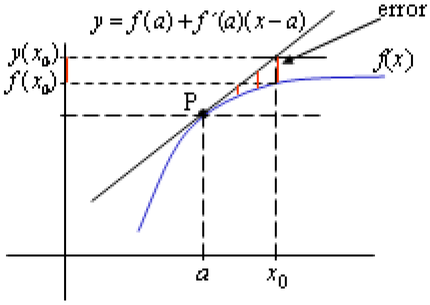
Nota: El valor $x = 14{,}14$ no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de ese tamaño.

Ejemplo 2: Entre los números, cuya suma es 36, encuentra aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

→ Sean x e y los números. Deben cumplir que $x + y = 36$.
Se desea que $C = x^2 + y^2$ sea mínima.
Sustituyendo $y = 36 - x$ en C se tiene: $C = x^2 + (36-x)^2 \Rightarrow C = 2x^2 - 72x + 1296$.
El mínimo de C se da en la solución de $C' = 0$ que hace positiva a C''.
Derivando: $C' = 4x - 72 = 0 \Rightarrow x = 18$.
Como $C'' = 4 > 0$, para el valor $x = 18$ se tiene la suma de cuadrados mínima.
Por tanto, ambos números deben ser iguales a 18.

Aproximación de una función por polinomios. Fórmula de Taylor

Como sabemos, la función lineal que mejor aproxima a una curva $f(x)$ en un entorno del punto $x = a$ es la recta tangente a la curva en ese punto. Esto es, la recta
$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x-a)$

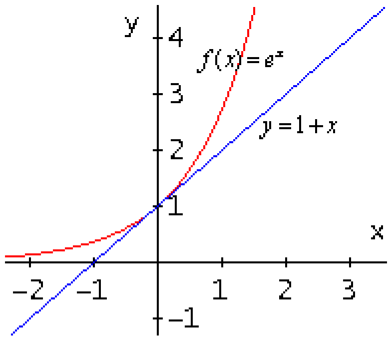


Al realizar esa aproximación se comete un error, que no puede conocerse, pero sí acotarse.
En el caso de la figura adjunta, si se estimara el valor de la función en el punto x_0 mediante su correspondiente valor en la recta tangente, el error que se comete es $y(x_0) - f(x_0)$.
Tal error suele darse en valor absoluto: $E = |y(x_0) - f(x_0)|$
Naturalmente, si nos alejamos de a el error aumenta; y si nos aceramos a a, disminuye. Es fácil ver que si $x_0 \to a$, entonces $E = |y(x_0) - f(x_0)| \to 0$.
Además, si hacemos $y = g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, se tiene:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)\right)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Esto significa que “ $f(x)-g(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $x-a$ ”, lo que equivale a decir que “ $f(x)-g(x) \to 0$ con mayor rapidez que $x-a \to 0$”.

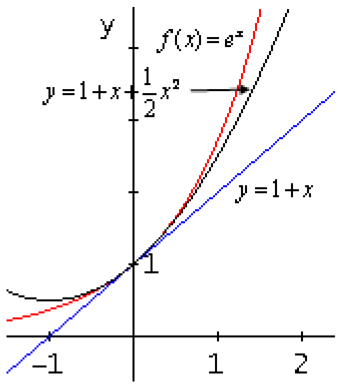
<u>Ejemplo</u>: La función $f(x) = e^x$ puede aproximarse en los alrededores de $x = 0$, mediante la recta tangente a la curva en ese punto. Esa tangente es: $y = 1 + x$.
En el punto $x_0 = 0,2$, el valor de la función es $f(0,2) = e^{0,2} \approx 1,221$; mientras que el valor sobre la recta es $1 + 0,2 = 1,2$. El error que se comete en la aproximación es algo mayor que 0,021, pero menor que 0,022.



La ecuación de la recta es un polinomio de grado 1: $P_1(x) = 1 + x$.

- Puede observarse que $f(0) = P_1(0) = 1$ y que $f'(0) = P_1'(0) = 1$, luego $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$.

La aproximación puede mejorarse mediante el polinomio de segundo grado
$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
En la figura adjunta se ilustra ese hecho.
En concreto $P_2(0,2) = 1,22$, con lo que error cometido sería aproximadamente de 0,001.



- Puede observarse que $P_2(x) = f(0) + f'(0)'x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$

Polinomio de Taylor (Inglés, 1685/1731)
En general, para cualquier función $f(x)$, el objetivo es encontrar un polinomio de grado *n* que tome un valor muy próximo a los que toma la función en un entorno del punto considerado. Esto es, encontrar un polinomio de grado *n*, $P_n(x)$, tal que $f(x) \approx P_n(x)$, en un entorno del punto *a*.
En el supuesto de que $f(x)$ sea derivable hasta el orden *n*, le pediremos a $P_n(x)$ que coincida con $f(x)$, y con sus sucesivas derivadas, en el punto $x = a$.
Si el polinomio elegido es $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n$, debe cumplir que:

$$f(a) = P_n(a).$$
$$f'(a) = P_n'(a)$$
$$f''(a) = P_n''(a)$$
$$f'''(a) = P_n'''(a)$$
$$f^{(4}(a) = P_n^{(4}(a)$$
….
$$f^{(n}(a) = P_n^{(n}(a)$$

El polinomio queda determinado cuando se conozcan sus coeficientes a_i. Esto se consigue imponiendo las condiciones anteriores.
Por tanto, derivando sucesivamente se tendrá:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... + a_n(x-a)^n,$$
$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + ... + na_n(x-a)^{n-1}$$
$$P_n''(x) = 2\cdot1\cdot a_2 + 3\cdot2a_3(x-a) + 4\cdot3a_4(x-a)^2 + ... + n\cdot(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$
$$P_n'''(x) = 3\cdot2\cdot1\cdot a_3 + 4\cdot3\cdot2a_4(x-a) + ... + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}$$
…
$$P_n^{(n}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1a_n = n!a_n$$

Como se desea que:

$$f(a) = P_n(a) = a_0 \qquad \to a_0 = f(a)$$
$$f'(a) = P_n'(a) = a_1 \qquad \to a_1 = f'(a)$$
$$f''(a) = P_n''(a) = 2\cdot1\cdot a_2 \qquad \to a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$f'''(a) = P_n'''(a) = 3\cdot2\cdot1\cdot a_3 \qquad \to a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$
$$f^{(4}(a) = P_n^{(4}(a) = 4!a_4 \qquad \to a_4 = \frac{f^{(4}(a)}{4!}$$
….
$$f^{(n}(a) = P_n^{(n}(a) = n!a_n \qquad \to a_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

Con lo que el polinomio buscado es:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo:
Hallemos el polinomio de Taylor de grado *n* de la función $f(x) = e^x$, en el punto *x* = 0.
En este caso, como $x = a = 0$, el polinomio será:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n$$

Y como $f(x) = f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n}(x) = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n}(0) = e^0 = 1.$$

Por tanto:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n$$

Podemos observar que el polinomio de grado 2 es el que hemos utilizado anteriormente:

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Resto de Lagrange: error de aproximación
La diferencia entre los valores en un punto *x*, próximo a *a*, de la función $f(x)$ y el polinomio de Taylor, $P_n(x)$, será $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$; esto es, $f(x) = P_x(x) + R_{n+1}(x)$. La diferencia es el error cometido cuando se sustituye la función por el polinomio. (Como se dijo anteriormente, ese error no puede conocerse, pero sí puede acotarse). Asumimos sin demostrar el siguiente teorema:

Si existe la derivada $f^{(n+1}(x)$ en un entorno del punto *x* = *a*, el valor de $R_{n+1}(x)$ viene dado por la expresión

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ donde } c \text{ está entre } a \text{ y } x.$$

Observaciones sobre el resto:

- Si *n* es grande y si *x* está próximo a $a \Rightarrow (n+1)!$ es grande y $(x-a)^{n+1}$ pequeño; en concreto si $x - a < 1$, $(x-a)^{n+1}$ es cada vez más pequeño. En consecuencia $|R_{n+1}(x)|$ será pequeño.
- Si se consigue que $\left|f^{(n+1}(x)\right| \le M$ en el intervalo de estudio, entonces $|R_{n+1}(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$. Esto permite acotar el error.

La determinación de *M* depende de la función considerada. Véanse algunos casos:

- Si $f^{(n+1}(x) = e^x$, y dado que e^x es creciente, se tiene:

Para $c < 0 \Rightarrow e^c < e^0 = 1$. Luego e^c puede acortarse por 1.
Para $0 < c < 1 \Rightarrow e^0 < e^c < e^1 < 3$. Luego e^c puede acortarse por 3.
Para $0 < c < 1/2 \Rightarrow e^0 < e^c < e^{1/2} < 3^{1/2} < 2$. Luego e^c puede acortarse por 2.

- Si $f^{(n+1}(x) = \frac{1}{x^p}$, con $p > 1$, se tiene:

Para $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{1} = 1$; y $\frac{1}{x^p} < \frac{1}{1} = 1$. Luego $f^{(n+1}(x) = \frac{1}{x^p}$ puede acortarse por 1.

- De manera análoga, si $f^{(n+1}(x)=\dfrac{1}{(x+1)^p}$, con $p > 1$, se tiene:

Para $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^p}<\dfrac{1}{1}=1$. Luego $f^{(n+1}(x)=\dfrac{1}{(x+1)^p}$ puede acortarse por 1.

- Las funciones seno y coseno están acotadas por 1.

Ejemplo**:**

a) Para la función $f(x)=e^x$, el error que se comete al aproximarla mediante el polinomio de segundo grado, $P_2(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2$, es, $R_3(x)=\dfrac{e^c}{3!}x^3$, pues $f'''(c)=e^c$.

Cuando se calcula $f(0,2)$ mediante el polinomio, el error será $R_3(0,2)=\dfrac{e^c}{3!}0,2^3$, $0 < c < 0,2$.

Por tanto, como $e^c<e^{0,5}<2 \Rightarrow R_3(0,2)=\dfrac{e^c}{3!}0,2^3<\dfrac{2}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\dfrac{1}{125}=\dfrac{1}{375}$ = 0,00266...

(Si se utiliza la calculadora se tiene: $e^{0,2}$ = 1,221402758, $P_2(0,2)=1,22 \Rightarrow$
$R_3(0,2)=0,001402758$.)

b) Si se aproxima $f(x)=x\ln(x+1)$ por el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $x = 0$, se tendrá:

$f(x)=x\ln(x+1) \Rightarrow f(0)=0$ $\qquad$ $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0)=2$ $\qquad$ $f'''(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0)=-3$

$f^{4)}(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}+\dfrac{6}{(x+1)^6} \Rightarrow R_4(x)=\left(\dfrac{2}{(c+1)^3}+\dfrac{6}{(c+1)^6}\right)\cdot\dfrac{x^4}{4!}$

Por tanto:

$$P(x)=\frac{2x^2}{2!}-\frac{3x^3}{3!}=x^2-\frac{1}{2}x^3 \text{ y } f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^3+R_4(x)$$

Si se pretende calcular $f(0,3)=0,3\ln(0,3+1)=0,3\ln(1,3)$, su valor aproximado es

$$P(0,3)=\left(\frac{3}{10}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{153}{2000}=0,0765.$$

El erro que se comete con esa aproximación puede acotarse así:

$$R_4(x)=\left(\frac{2}{(c+1)^3}+\frac{6}{(c+1)^6}\right)\cdot\frac{x^4}{4!}<(2+6)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{24}=\frac{27}{10000}=0,0027$$

Observaciones:

1. Con la calculadora se obtiene $f(0,3)=0,3\ln(1,3)=0,078709$. Luego, en efecto $\left|f(0,3)-P(0,3)\right|=\left|0,078709-0,0765\right|=0,002209$, que es menor que $R_4(x)=0,0027$.

2. Cabe preguntarse: ¿qué interés tiene una justificación “tan compleja” de estas aproximaciones y de su cota de error cuando se dispone de calculadoras que dan el resultado con 10 cifras decimales? Una respuesta puede ser: Si la calculadora da esos resultados “tan exactos” es porque hay un desarrollo de Taylor para esas funciones, que de alguna manera está dentro de la calculadora.

Fórmula de Taylor

Usando el resto, como $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$, se obtiene la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde *c* está entre *a* y *x*.

- Si el polinomio se halla para el punto $x = 0$, la fórmula queda:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

que se conoce con el nombre de fórmula de **MacLaurin** (Inglés, 1698/1746).

- Si en la fórmula de Taylor se hace $x - a = h$, esta adopta la siguiente forma:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + ... + \frac{f^{(n}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Apunte de la aplicación de la fórmula de Taylor para el estudio de la variación y curvatura de una función.

Para $n = 1$ la fórmula de Taylor queda: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_2(x)$, donde *c* está entre *a* y *x*; y $R_2(x)$ es más pequeño que $x - a$, cuando $x \to a$.

A partir de esa fórmula puede verse que si $f'(a) > 0$, para valores de *x* mayores que *a* se cumple que $f(x) > f(a) \Rightarrow$ la función es creciente en *a*. (Análogo cuando $f'(a) < 0$ y decrecimiento.)

Para $n = 2$, la fórmula de Taylor queda: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_3(x)$,

donde *c* está entre *a* y *x*; y $R_3(x)$ es infinitesimal con respecto a $(x-a)^2$ cuando $x \to a$.

- Si $f'(a) = 0$, que es la condición necesaria para máximo y mínimo, se tiene:

$$f(x) = f(a) + 0 + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_3(x)$$

En consecuencia, si $f''(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$, tanto para valores de *x* menores que *a* como mayores que *a*, pues $(x-a)^2$ siempre es positivo $\Rightarrow$ la función tiene un mínimo en *a*. (Análogo cuando $f''(a) < 0$ y máximo.)

Utilizando la fórmula de Taylor de grado *n* puede justificarse el criterio general para la determinación de puntos máximos, mínimos y de inflexión, que es el siguiente:

Si $x = a$ es un punto que cumple:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) = 0,\ ...\ f^{n-1)}(a) = 0 \text{ y } f^{n)}(a) \neq 0,$$

entonces:

Si *n* es par y $f^{n)}(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo.

Si *n* es par y $f^{n)}(a) > 0$, en $x = a$ hay un mínimo.

Si *n* es impar, en $x = a$ hay un punto de inflexión, aunque $f'(a) \neq 0$.

- Si $f''(a)>0$, $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+R_3(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(\text{nº positivo})\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ = [recta tangente en $x = a$] + (nº positivo) → la función está por encima de la recta tangente. Por tanto, la función será convexa. (Análogamente puede deducirse la concavidad.)

Además de la bibliografía recomendada en la Guía Docente puede verse: Salas Hille, Tomo 1, Tercera Edición, *Calculus*, Editorial Reverté.

Algunos desarrollos de Taylor:

1. Función $f(x)=\ln(x+1)$ en el punto $x = 0$.

$$f(x)=\ln(x+1)\to f'(x)=\frac{1}{x+1}\to f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\to f'''(x)=\frac{2\cdot 1}{(x+1)^3}\to$$
$$\to f^{(4}(x)=\frac{-3\cdot 2\cdot 1}{(x+1)^4}\ \ldots\to f^{(n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

En $x = 0$:

$$f(0)=\ln 1=0\to f'(0)=1\to f''(0)=-1\to f'''(0)=2\cdot 1\to f^{(4}(0)=-3\cdot 2\cdot 1\ \ldots\to$$
$$\to f^{(n}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

Luego: $P_n(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n!}$

Mientras que $f(x)=\ln(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$

Si se calcula $f(0{,}2)=\ln(1{,}2)$ utilizando el polinomio de grado 3 se obtiene:

$$P_3(x)=0{,}2-\frac{0{,}2^2}{2}+\frac{0{,}2^3}{3}=\frac{1}{5}-\frac{1}{50}+\frac{1}{375}=\frac{137}{750}\approx 0{,}18266...$$

Con la calculadora, ln(1,2) = 0,182321556. El error es 0,00035.

Si no se dispone de calculadora y se tuviese que dar una cota de error, ésta vendría dada por

$$R_4(0{,}2)=\left|\frac{\frac{-3!}{(c+1)^4}}{4!}\cdot 0{,}2^4\right|=\left|\frac{-1}{4(c+1)^4}\cdot\frac{1}{5^4}\right|<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{625}=\frac{1}{2500}=0{,}0004.$$

2. Función $f(x)=\sin x$ en el punto $x = 0$.

$$f(x)=\sin x\to f'(x)=\cos x\to f''(x)=-\sin x\to f'''(x)=-\cos x\to$$
$$\to f^{(4}(x)=\sin x\ \ldots$$

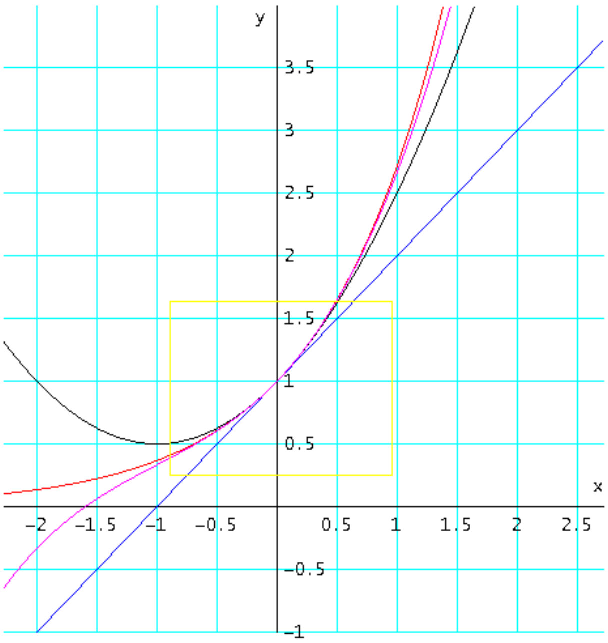
En $x = 0$:

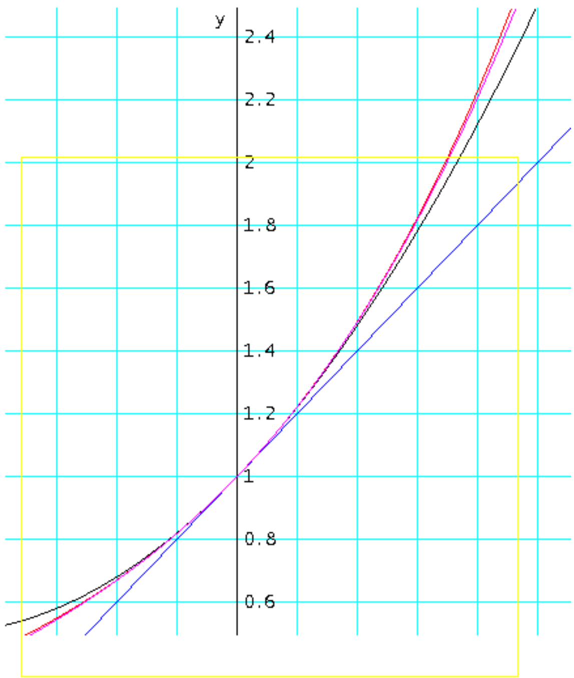
$$f(0)=\sin 0=0\to f'(0)=\cos 0=1\to f''(0)=0\to f'''(0)=-1\to f^{(4}(0)=0\ \ldots$$

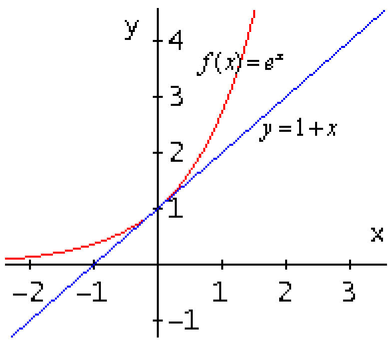
Luego: $P_n(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+...$

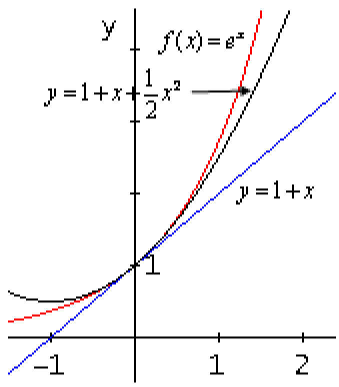
3. Función $f(x)=\cos x$ en el punto $x = 0\to P_n(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+...$

Aproximación gráfica de $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$









Aproximación gráfica de $f(x) = \sin x$ en el punto $x = 0$