Tema 3. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Límite de una función en un punto

Vamos a estudiar el comportamiento de las funciones

$$f(x) = x^2 - 3 \qquad g(x) = ENT[x] \qquad h(x) = \frac{3}{x-2} \qquad i(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

en el punto $x = 2$.
Para ello, damos a x valores próximos a 2 y calculamos los valores que toma la respectiva función.

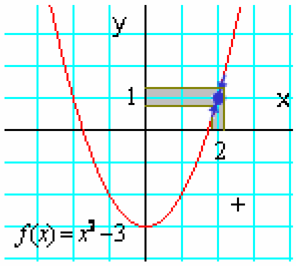
- Para $f(x) = x^2 - 3$

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	0,61	0,9601	0,996001	$\to 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41

Tanto para valores menores que 2 como para mayores que 2 (en ambos casos próximos a 2), la función toma valores muy próximos a 1. (Véase la figura adjunta.)

En este caso, $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3) = 1$.

Observa que la función está definida en $x = 2$ y que el límite en ese punto coincide con su valor de definición.



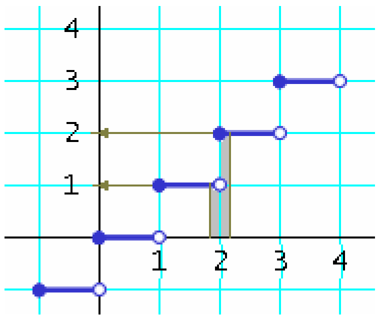
- Para $g(x) = ENT[x]$ (La parte entera de x se define como el número entero inmediatamente menor o igual a x.)

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$g(x)$	1	1	1	$\to$ ¿? $\leftarrow$	2	2	2

Para valores cercanos y menores que 2, la función toma el valor 1; para valores cercanos y mayores que 2, siempre vale 2. (Véase la figura adjunta.)

En este caso, $\lim\limits_{x \to 2} ENT[x]$ no existe.

Observa que la función está definida en $x = 2$ y sin embargo no tiene límite en ese punto.



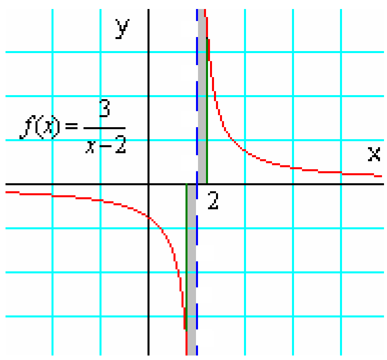
- Para $h(x) = \dfrac{3}{x-2}$

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$h(x)$	–30	–300	–3000	$\to$ ¿? $\leftarrow$	3000	300	30

Para valores cercanos y menores que 2, la función toma valores grandes y negativos; para valores cercanos y mayores que 2, la función toma valores cada vez más grandes. (Véase la fig.)

En este caso, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x-2}$ no existe.

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y que tampoco tiene límite en ese punto.



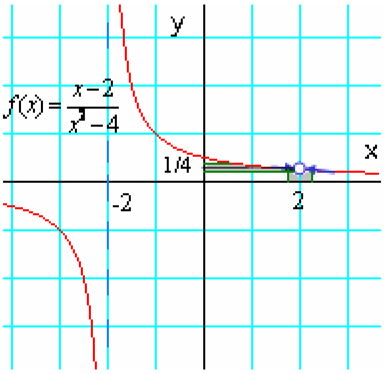
- Para $i(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

	$x \to 2^-$					$2^+ \leftarrow x$	
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$i(x)$	0,2564	0,2506	0,25006	$\to 0{,}25 \leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439

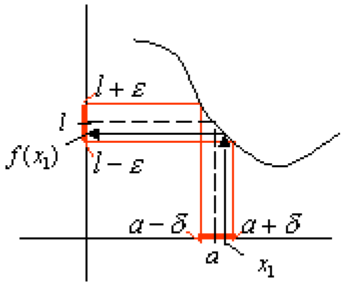
Para valores próximos y menores que 2, la función se acerca cada vez más a 0,25; y lo mismo hace para valores próximos y mayores que 2. (Véase la figura adjunta.)

En este caso, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = 0{,}25$.

Observa que la función no está definida en $x = 2$ y sin embargo tiene límite en ese punto.



Definición de límite de una función en un punto
A la vista de los ejemplos anteriores, concluimos:
(1) Para la existencia del límite de una función en un punto a no importa que la función esté o no definida en ese punto.
(2) Lo que importa son los valores que toma la función en un entorno de ese punto a.
(3) Existirá el límite, y su valor será l, cuando todos los puntos próximos a a se transforman, mediante la función, en puntos próximos a l. Esto es, si x_1 está cerca de a, entonces $f(x_1)$ está cerca de l. (Véase la figura adjunta.)



Con más precisión:
(4) Existirá el límite de $f(x)$, cuando $x \to a$, y su valor será l, si para cualquier entorno de l, $E_\varepsilon(l)$, puede encontrarse otro entorno de a, $E_\delta(a)$, de manera que todos los valores de $x \in E_\delta(a)$ se transforman, mediante $f(x)$, en puntos de $E_\varepsilon(l)$.

O con símbolos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;\middle|\; \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}$$

Esta expresión se lee así: “límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a l”, equivale a decir que “para todo número épsilon mayor que cero, existe un número delta, también mayor que 0, tal que para todo x que cumpla que su diferencia con a, en valor absoluto, sea mayor que 0 y menor que delta, se cumple que la diferencia entre $f(x)$ y l, también en valor absoluto, es menor que el número épsilon elegido”.

La condición, $0 < |x-a|$, indica que x no toma el valor a, pues en tal caso $x - a = 0$.

La condición, $|x-a| < \delta$, indica que $x \in E_\delta(a)$.

La conclusión, $|f(x) - l| < \varepsilon$, significa que $f(x) \in E_\varepsilon(l)$.

Límites laterales

En la definición de límite no se distingue entre las posibilidades $x < a$ o $x > a$, pues al escribir $0 < |x - a| < \delta$ resulta indiferente: lo único que se pide es que x este próximo a a.

No obstante, algunas veces conviene distinguir si $x \to a$ por la izquierda (siendo $x < a$), que se escribe $x \to a^-$; o si $x \to a$ por la derecha (siendo $x > a$), denotado por $x \to a^+$.

Esta distinción da lugar al estudio de los límites laterales.

A $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda.

A $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ se le llama límite lateral por la derecha

<u>Observación:</u>

Este estudio tiene interés cuando:

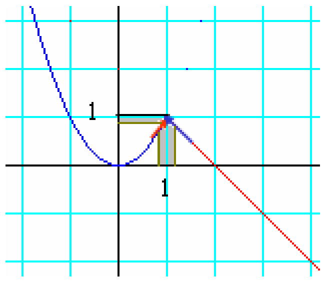
1. La función está definida a trozos y se quiere calcular el límite en alguno de los puntos de unión de los diferentes trozos.
2. La función tiene asíntotas verticales y se quiere calcular la posición de la curva respecto a ellas.

Pues bien, para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los limites laterales y que sean iguales. Esto es, para que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ es necesario que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l\,.$$

<u>Ejemplo</u>:

Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$ es necesario considerar los límites laterales.



Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x) = 1$

Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale 1.

Algunas propiedades de las operaciones con límites

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, con A y B finitos, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$

4) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)} = A^B$

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left(\log_b f(x)\right) = \log_b \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right) = \log_b A$

1) El límite de una suma es igual a la suma de los límites.
2) El límite de un producto es igual al producto de los límites.
3) El límite de un cociente es igual al cociente de los límites.
4) El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.
5) El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

Estas propiedades se aplican en ambos sentidos (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), según convenga.

Cálculo práctico de límites

En la práctica, la mayoría de los límites se hacen aplicando las propiedades anteriores. Cuando esas propiedades sean insuficientes se recurrirá a otras reglas algebraicas de cálculo: simplificaciones, extracción de factor común, operaciones con potencias y raíces… (Más adelante recurriremos a la conocida regla de L´Hôpital, dando así entrada al cálculo infinitesimal.)

Casos inmediatos

Como sabes, si $f(x)$ es una función usual (polinómicas, racionales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto $x = a$, *suele cumplirse* que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Esto es: para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tiende la x. Así, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3) = 2^2-3 = 1$.

Igualmente:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2+1}{2-1} = 3$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x^2-1} = \sqrt{2\cdot 5^2-1} = \sqrt{49} = 7$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1$; d) $\lim\limits_{x\to 3}(\ln(x^2-2)) = \ln(3^2-2) = \ln 7$

Esto no es así en el caso $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}$, pues la función $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ no está definida en $x = 2$.

Observación: Las funciones que cumplen que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, se llaman continuas.

Límites de funciones racionales cuando $x \to a$. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. El único caso de límite no inmediato es cuando da lugar a la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Esto es, cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, pues $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Este caso puede resolverse simplificando la expresión inicial, pues si $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, se verifica que $P(x) = (x-a)P_1(x)$ y $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$, de donde el cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Luego: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cancel{(x-a)}P_1(x)}{\cancel{(x-a)}Q_1(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

Si el último límite no resulta inmediato se aplica nuevamente la regla anterior.

Observación: El teorema del factor dice: Para un polinomio $P(x)$, si $P(a) = 0 \Leftrightarrow x-a$ es un factor de $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-a)P_1(x)$. El polinomio $P_1(x)$ se obtiene dividiendo.

Ejemplo:

El $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$, que no resulta inmediato, puede resolverse así:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

El caso $\frac{k}{0}$

Cuando al hacer cualquier límite aparezca la expresión $\frac{k}{0}$ (esto es, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0}$), se pondrá que el valor de ese límite es infinito. Esto significa que aunque el límite no existe, el valor de la función se hace tan grande como se quiera, infinitamente grande.
En estos casos es conveniente estudiar los límites laterales en el punto, pues con frecuencia se obtienen signos distintos para el infinito.

Observación:
Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$: la recta $x = a$.

Ejemplos**:**
a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0}\right] = \infty$. También $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x-1}{x^2-4} = \left[\frac{-7}{0}\right] = \infty$

b) Igualmente, para $h(x) = \frac{3}{x-2}$, que no está definida en $x = 2$, cuando $x \to 2$ se tiene que
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{3}{x-2} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$.

Si en este caso se estudian los límites laterales se tiene:
→ por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$ → por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$
El signo + o – se decide por los signos del numerador y denominador.
Geométricamente, estos resultados indican que la curva asociada a la función se va hacia –∞ por la izquierda de 2; y hacia +∞ por la derecha de $x = 2$. (Esto equivale a decir que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.)

Observación: Es frecuente confundir los casos $\frac{0}{k}$ y $\frac{k}{0}$. El primero vale 0: $\frac{0}{k}$ ⇔ 0 entre *algo* = 0.

La indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales**,** cuando se presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$ puede resolverse de dos formas:
1. Descomponiendo en factores y simplificando, como para las funciones racionales.
2. Multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación se opera y simplifica.

Observaciones:
Como las funciones con radicales de índice par no están definidas para valores negativos del radicando habrá que tenerlo en cuenta al plantear y resolver los límites. Así, por ejemplo el $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ sólo puede plantearse por la derecha de $x = 3$, pues $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ no está definida cuando $x \to 3^-$. Por tanto, este límite habría que plantearlo así: $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ y su valor sería ∞.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}}=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

b) Para la misma función, el límite $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}}$ sólo puede calcularse por la derecha, cuando $x\to -1^+$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+2)}{(x^2-1)(2\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)(2\sqrt{x}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{(x+1)\left(2\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{1}{2}$

Límite de una función cuando $x\to\infty$

Antes de estudiar estos límites conviene recordar algunos resultados de las operaciones relacionadas con el infinito.

$\infty+\infty=\infty$;	$-\infty-\infty=-\infty$;	$[\infty-\infty]$ es indeterminado	
$\infty\pm k=\infty$;	$-\infty\pm k=-\infty$;	$(+k)\cdot\infty=\infty$;	$(-k)\cdot\infty=-\infty$;
$\infty\cdot\infty=\infty$;	$\infty\cdot(-\infty)=-\infty$;	$\infty/(\pm k)=\pm\infty$;	$\pm k/(\pm\infty)=0$;
$\infty^{(+k)}=\infty$;	$\infty^{(-k)}=0$;	$[\infty/\infty]$ es indeterminado	

En todos los casos + k indica un número positivo fijo (– k, negativo); y cuando se escribe ∞ sin signo, se supone positivo.

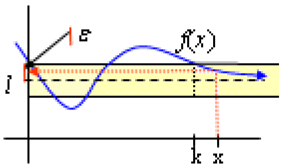
Límite finito de una función cuando $x\to\infty$

La función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+8}$ tiende a 2 cuando $x\to\infty$.

Efectivamente, si $x = 1000$, $f(1000) = 1{,}983$; si $x = 10000$, $f(10000) = 1{,}9995$.

Se escribe, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+8}=2$

La definición precisa es la siguiente:



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \iff \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\ k\ (\text{grande})\ \mid \forall\ x>k \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon}$$

(Para valores de x > k la función no sale de la franja marcada.)

Si $x\to-\infty$ la definición es análoga:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \iff \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\ k\ (\text{grande y negativo})\ \mid \forall\ x<k \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon}$$

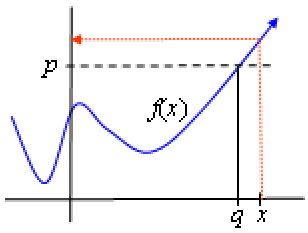
Observación:

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ se concluye que la recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y=f(x)$.

Ejemplo**:**

Como se ha visto anteriormente, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+8}=2$. Por tanto, la recta $y=2$ es una asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+8}$

<u>Límite infinito de una función cuando $x \to \infty$</u>



La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3}$ toma valores cada vez más grandes cuando $x \to \infty$. Efectivamente, si $x = 100$, $f(100) = 101{,}03$; si $x = 1000$, $f(1000) = 1001{,}003$.

Se escribe: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3} = +\infty$

La definición precisa es la siguiente:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, p \text{ (grande)}, \exists\, q \text{ (grande)} \mid \forall\, x > q \Rightarrow f(x) > p}$$

El resultado de estos límites muchas veces resulta inmediato, pues para calcularlos basta con sustituir y aplicar las operaciones con el infinito.

<u>Ejemplos:</u>

a) $\lim\limits_{x \to \infty}(x^2 - 5x + 17) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x(x - 5 + 17/x)\right) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 + 3x^2 - 2x + 5) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\ln(3x + 8)) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt[3]{x^3 - 2x} = -\infty$

Límites de funciones racionales cuando $x \to \infty$. Indeterminación $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, al calcular $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría la expresión indeterminada $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$; no obstante se resuelve muy fácilmente, pues su valor depende de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$:

– Si grado de $P(x)$ > grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

– Si grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.

– Si grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Un procedimiento para justificar estos resultados consiste en dividir el numerador y el denominador de la función dada por la mayor potencia de x presente en la expresión, como se hace el ejemplo b) siguiente.

<u>Ejemplos</u>**:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{2x^3 - 100} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 4x}{2x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{-3x^2}{x^2} + \dfrac{4x}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3 + \dfrac{4}{x}}{2 + \dfrac{3}{x^2}} = -\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 7}{5x + 19} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2 - 2x + +3} = 0$

La indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ puede resolverse aplicando la comparación de grados, teniendo en cuenta que al aparecer raíces los exponentes pueden ser fraccionarios.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{\sqrt{4x^2+6}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{4x^2+6}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{4x^2+6}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x^3+5x-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+3x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+5x-3}}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^3+5x-3}{x^4}}} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty$

La indeterminación $[1^{+\infty}]$. El número *e*

El número e se define como el límite, cuando $x \to +\infty$, de la función $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Esto es:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Aplicando esta definición y las propiedades algebraicas de los límites, pueden darse otros resultados relaciones con el número e. Por ejemplo:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx} = e^k$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} = e$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{p}{x}\right)^{x} = e^p$

<u>Ejemplos</u>**:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{(-2)}{x}\right)^{x} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x/(-2)}\right)^{x/(-2)}\right]^{(-2)} = e^{-2}$

Comportamiento de otras funciones en el infinito

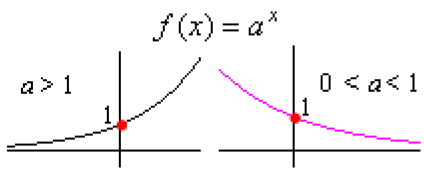
El límite cuando $x \to \infty$ de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se calcula como sigue.

<u>Funciones exponenciales</u>

Además de de las propiedades usuales (de la potenciación) se emplea la siguiente:

Si $f(x) = a^{g(x)}$, con $a > 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} a^{g(x)} = a^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$

También es necesario recordar cómo son las gráficas de las funciones exponenciales.



<u>Ejemplos</u>**:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = e^{+\infty} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{3x} = 2^{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = e^{-\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$

Funciones logarítmicas

La propiedad particular que puede aplicarse aquí es: $\lim_{x\to\infty}\left(\log_a f(x)\right) = \log_a\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{10x}{x+5}\right) = \log\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x+5}\right) = \log 10 = 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

Funciones trigonométricas

En ningún caso existen los límites en el infinito. Esto es: $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ y $\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$ no existen, ya que dichas funciones son periódicas (repiten indefinidamente su comportamiento.) Para funciones compuestas hay que determinarlo en cada caso.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} = 0$, pues $-1 \le \sin x \le 1$, mientras que el denominador tiende a ∞.

b) $\lim_{x\to\pm\infty} x\cos^2 x$ no existe. Como $0 \le \cos^2 x \le 1$, $f(x) = x\cos^2 x$ tomará valores entre 0 y x.

Observación: Como se dijo en su momento, la función $f(x) = \tan x$ tiene un comportamiento asintótico cuando $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, cumpliéndose que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \tan x = \infty$. Por tanto, las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales de la función.

La indeterminación de la forma [$\infty - \infty$]

Para terminar este apartado de límites vamos a resolver la indeterminación [$\infty - \infty$], tanto cuando $x \to a$ como cuando $x \to \infty$.

El procedimiento general consiste en operar la expresión inicial hasta transformarla en otra expresión no indeterminada o en otra forma indeterminada del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Estas otras formas se resolverían por cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Ejemplos**:**

a) $\lim_{x\to3}\left(\frac{2x}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9}\right)$ es una forma indeterminada del tipo [$\infty - \infty$].

Para transformarla se opera la expresión dada: se hace la resta. Así:

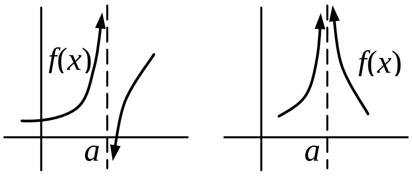
$$\lim_{x\to3}\left(\frac{2x}{x-3} - \frac{x^2+1}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to3}\left(\frac{(2x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2+1}{x^2-9}\right) = \lim_{x\to3}\left(\frac{2x^2+3x-9}{x^2-9} - \frac{x^2+1}{x^2-9}\right) =$$

$$= \lim_{x\to3}\left(\frac{x^2+3x-10}{x^2-9}\right) = \left[\frac{8}{0}\right] = \infty.$$

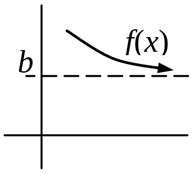
b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \text{(dividiendo por } x\text{)} = 1.$$

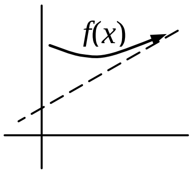
Aplicación del cálculo de límites a la determinación de las asíntotas de una función
Las asíntotas de una curva son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de la función. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.



Asíntotas verticales



Asíntota horizontal



Asíntota oblicua

Los <u>criterios</u> para determinar las asíntotas de una curva son:

- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.
- La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.
- La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m,\ (m \neq 0 \text{ y } m \neq \infty); \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n,\ (n \neq \infty).$$

<u>Ejemplos</u>:

a) Como se dijo más atrás, la función $h(x) = \dfrac{3}{x-2}$, que no está definida en $x = 2$, tiene una asíntota vertical en ese punto, pues $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \infty$.

También tiene otra asíntota horizontal, la recta $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-2} = 0$.

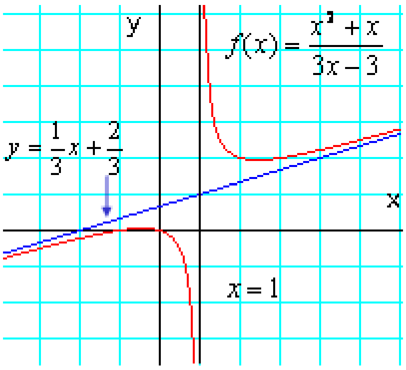
b) Las funciones exponenciales suelen tener asíntotas horizontales. En concreto, $f(x) = e^x$ tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$.

- Un caso particularmente frecuente se da con las <u>funciones racionales</u>: con $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Estas

funciones:
– *pueden* tener asíntotas verticales en las raíces del denominador: en las soluciones de $Q(x) = 0$.
– tienen asíntotas horizontales si el grado de $P(x)$ es menor o igual que el grado de $Q(x)$.
– tienen una asíntota oblicua siempre que el grado de $P(x)$ = 1 + grado $Q(x)$.

<u>Ejemplo</u>:

La función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{3x-3}$ tiene dos asíntotas, una vertical (la recta $x = 1$) y otra oblicua, la recta $y = mx + n$, siendo:



$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x}{3x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x^2-3x} = \frac{1}{3};$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3x-3} - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-3} = \frac{2}{3}$$

La asíntota es la recta $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

Continuidad de una función en un punto

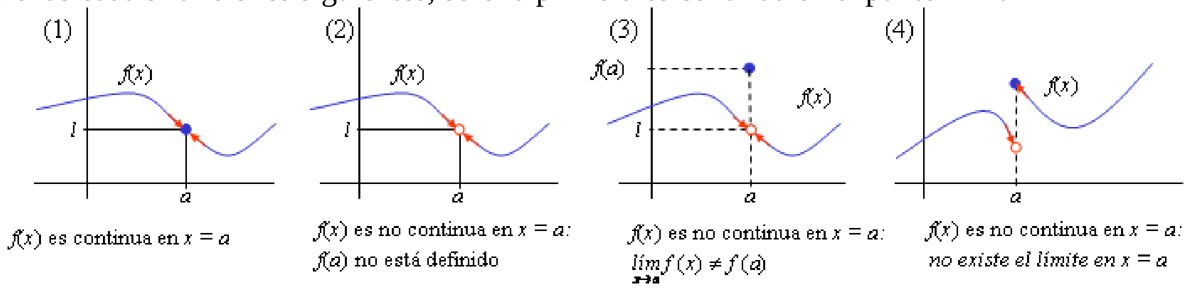
Una función es continua en un punto cuando el límite de la función en dicho punto es igual al valor de la función en él.
La definición correcta es la siguiente:

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en el punto } x = a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Esto implica que:

1. La función $f(x)$ está definida en el punto $x = a$. Esto es, se sabe cuánto vale $f(a)$
2. Existe el límite en $x = a$: existe $\lim_{x\to a} f(x) = l$
3. El valor del límite coincide con $f(a)$. Esto es, $\lim_{x\to a} f(x) = l = f(a)$

De las cuatro funciones siguientes, sólo la primera es continua en el punto $x = a$



Discontinuidad evitable

Cuando una función no es continua de dice que es discontinua. La causa más común de la discontinuidad está en que la función no esté definida en un punto. Así, por ejemplo, la función

$f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)}$ es discontinua en $x = -2$ y en $x = 1$.

Hay casos en los que la discontinuidad es evitable. Así sucede para las funciones dadas en las gráficas (2) y (3) de más arriba.

- Una función $f(x)$ tiene una <u>discontinuidad evitable</u> en el punto $x = a$ cuando tiene límite en ese punto.

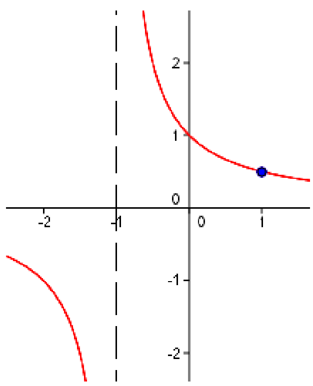
En el caso (2) la discontinuidad se evita definiendo $f(a) = l$.

En el caso (3) la discontinuidad de evita (imponiendo) redefiniendo $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

En el caso (4) la discontinuidad no puede evitarse, pues la gráfica da un *salto* en el punto $x = a$.

<u>Ejemplo</u>:

La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, pues en esos dos puntos no está definida.



Si se hace el límite en esos puntos, se tiene:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

En el primer caso, en $x = -1$, no existe límite; por tanto, la discontinuidad no puede evitarse. (Esta discontinuidad se llama de salto infinito).

En cambio, en $x = 1$ sí puede evitarse. Se evita definiendo aparte $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Continuidad lateral

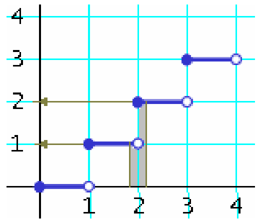
La función representada en la grafica (4) puede considerarse continua por la derecha del punto $x = a$. En cambio, no es continua a su izquierda.

Una función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto $x = a$ (en a^+) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Una función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto $x = a$ (en a^-) si está definida (se sabe el valor de $f(a)$) y el límite coincide con ese valor. Esto es, cuando $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

<u>Ejemplos</u>:

a) La función $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ no es continua en $x = -2$, pues en ese punto no está definida. En consecuencia, tampoco es continua por ninguno de los lados del punto $x = -2$.



b) La función $f(x) = ENT[x]$ es discontinua para todo $x \in \mathbf{Z}$, pues la función no tiene límite para ningún valor entero de *x*.
No obstante, la función es continua por la derecha de todo *x*. Por ejemplo, por la derecha de $x = 2$, se cumple que $\lim_{x\to 2^+} ENT[x] = 2 = ENT[2]$.
En cambio, no es continua por la izquierda de cualquier *x* entero. Por ejemplo, para el mismo $x = 2$, por su izquierda se cumple que $\lim_{x\to 2^-} ENT[x] = 1 \neq ENT[2]$

Propiedades de las funciones continuas

Aunque sea de manera escueta conviene indicar algunas propiedades relacionadas con las operaciones de las funciones. Estas propiedades son:
Si $f(x)$ y $g(x)$ con continuas en $x = a$, entonces:

- $f(x) \pm g(x)$ es continua en $x = a$.
- $f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.
- $\dfrac{1}{f(x)}$ es continua en $x = a$ si $f(a) \neq 0$.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en *a* cuando $g(a) \neq 0$.

Las propiedades anteriores permiten concluir que la mayoría de las funciones usuales son continuas en todos los puntos de su dominio. Así, sin ser exhaustivo puede afirmarse que:
1) <u>Las funciones polinómicas</u>, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, son continuas siempre, para todo número real *x*.

<u>Ejemplos</u>:
Son funciones continuas:
a) $f(x) = 2$ $\to$ Las funciones constantes se representan mediante una recta horizontal.
b) $f(x) = 2 - x$ $\to$ La función polinómica de primer grado es una recta.
c) $f(x) = 2 + 3x - x^2$ $\to$ La función polinómica de segundo grado es una parábola.
d) $f(x) = x^5 - 2x$ $\to$ Todos los polinomios, de cualquier grado son funciones continuas.

2) <u>Las funciones racionales</u>, $f(x)=\dfrac{a_0+a_1x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$, son continuas en todos los puntos de su dominio; esto es, siempre que $b_0+b_1x+...+b_mx^m\neq 0$.

<u>Ejemplos</u>:

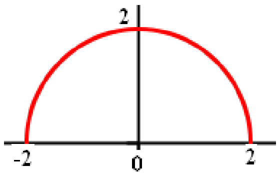
a) La función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+2}$ es continua siempre, para todo número real, pues su denominador nunca se hace 0.

b) La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$ es continua para todo número real distinto de 1, 2, y –3. Para esos tres valores se anula el denominador.

3) <u>Las funciones con radicales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales</u> son continuas en todos los puntos de su dominio.

<u>Ejemplos</u>:

a) La función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ es continua sólo en el intervalo [–2, 2], que es su dominio de definición. .
Esta función determina la circunferencia $x^2+y^2=4$.



b) Las funciones seno y coseno son continua siempre. La función $f(x)=\dfrac{x+2}{1-\cos x}$, por ejemplo, no es continua en los puntos en los que no está definida, que son $x=2k\pi$.

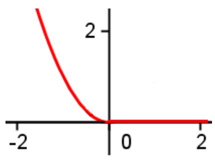
c) La función $f(x)=\log(x^2-1)$, que está definida siempre que $x\notin[-1, 1]$, es continua para todo $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

d) La función $f(x)=(x-3)e^{2x+1}$ es continua en todo **R**. En cambio, $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$ no es continua en $x=-2$, ya que no está definida en ese punto.

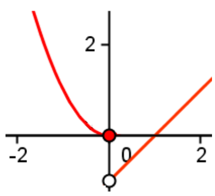
4) Las funciones definidas a trozos serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.

<u>Ejemplos</u>**:**

a) La función $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } x\leq 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$ es continua en todo **R**.

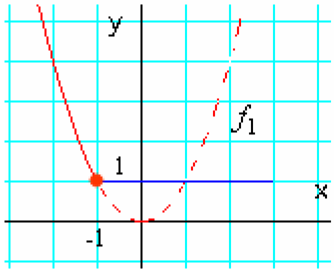


b) La función $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } x\leq 0\\ x-1 & \text{si } x>0\end{cases}$ es discontinua en $x=0$.



c) ¿Para qué valores de a las funciones $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le a \\ a+2, & \text{si } x>a \end{cases}$ son continuas?

El único punto que presenta dificultades es $x = a$. La función será continua en ese punto (que pueden ser varios, lo que explica el plural "funciones" del enunciado), cuando los límites laterales coincidan con $f(a)$, que vale a^2.



Por la izquierda:

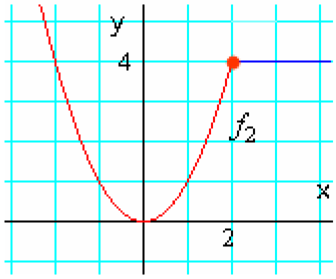
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} x^2 = a^2$$

Por la derecha;

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (a+2) = a+2$$

Como deben ser iguales: $a^2 = a+2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow$ $a = -1$ o $a = 2$.

Si $a = -1$, la función es: $f_1(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le -1 \\ 1, & \text{si } x>-1 \end{cases}$



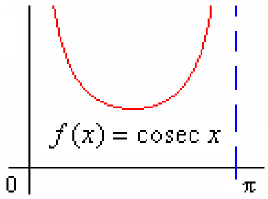
Si $a = 2$, la función es: $f_2(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 2 \\ 4, & \text{si } x>2 \end{cases}$

Las gráficas de estas funciones son las dibujadas al margen.

Continuidad en un intervalo

El concepto de continuidad en un punto puede extenderse a un intervalo finito o infinito, abierto o cerrado. Esto permitirá aplicar algunos teoremas importantes propios de las funciones continuas.

Definición: Una función *f* es continua en un intervalo abierto (*a*, *b*) cuando es continua para todo punto $c \in (a, b)$.

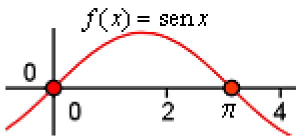


Ejemplo:

La función $f(x) = \text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$ es continua en el intervalo (0, π).

Nota: La función cosec *x* es discontinua en todos los puntos que anulan a sen *x*; esto es, en $x = k\pi$.

Definición: Una función *f* es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*] cuando es continua para todo punto $c \in (a, b)$ y además es continua en *a* por la derecha y en *b* por la izquierda.



Ejemplo:

La función $f(x) = \text{sen}\, x$ es continua en el intervalo [0, π].

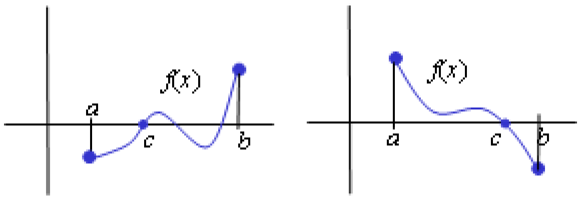
Nota: La función sen *x* es continua en todo **R**.

Teorema 1 (de Bolzano)

Asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje en algún punto de ese intervalo.

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en *a* ($f(a) < 0$) y positiva en *b* ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto *c* entre *a* y *b* ($f(c) = 0$).



Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$).

Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

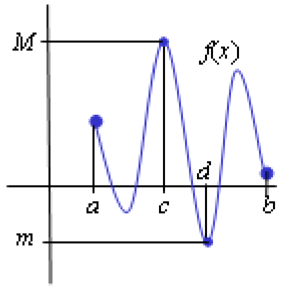
Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ es continua en todo **R**, y en particular en el intervalo [1, 2].
Como $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$ y $f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$, puede asegurase que ésa función toma el valor 0 para algún número comprendido entre 1 y 2. Esto es, existe un número *c*, mayor que 1 y menor que 2, tal que $f(c) = 0$.

O sea, existe un número que cumple la igualdad $0 = c^3 - 3c - 1$; o, lo que es lo mismo, la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ tiene una solución que está entre 1 y 2. Otra cosa es encontrar el valor exacto de esa solución, pues salvo casos concretos no puede encontrarse; aunque, como veremos en las aplicaciones de estos teoremas siempre se puede hallar una buena aproximación.

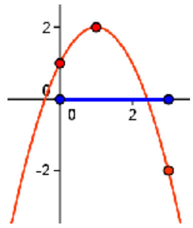
b) La función $f(x) = x - \cos x$ corta al eje *OX* en el intervalo [0, 1] pues: (1) es continua en todo **R**, y en particular en el intervalo dado; (2) $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ y $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$, pues cos 1 < 1. Por tanto, la función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. En ese punto la función $f(x) = x - \cos x$ corta al eje *OX*.

Teorema 2 (de Weierstrass)
Asegura que toda función continua en un cerrado tiene un máximo y un mínimo (absolutos) en ese intervalo.
Teorema: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M \geq f(x)$, para todo x perteneciente a $[a, b]$.

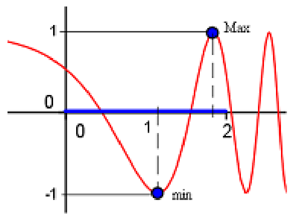


El significado geométrico de este teorema es que la gráfica de *f* alcanza el máximo en $x = c$ y ese máximo vale *M*.
Análogamente, existe un punto $d \in [a, b]$ tal que $f(d) = m \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$; que equivale a decir en $x = d$ la función toma el valor mínimo.

Ejemplos**:**
a) La función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ es continua en el intervalo [0, 3] (y en todo **R**). Por tanto existe un punto de ese intervalo en el cual $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ alcanza su valor máximo; y otro punto en el que toma el valor mínimo. En este caso, al tratarse de una parábola es fácil encontrar esos puntos. El máximo lo toma en $x = 1$ y vale 2; el mínimo, en $x = 3$ y vale -2.



b) La función $f(x) = \cos(e^x)$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$. Por tanto, existe un punto de ese intervalo en el cual esa función alcanza su valor máximo. En este caso resulta más difícil encontrar dicho valor. No obstante, se sabe que si $e^x = 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, la función vale 1: el máximo para el coseno; y cuando $e^x = (2k+1)\pi$, la función vale -1, el mínimo para el coseno.
En el primer caso, para $k = 1$ se tiene: $e^x = 2\pi \Rightarrow x \approx 1{,}84 \rightarrow$ máximo.
En el segundo caso, para $k = 0$: $e^x = \pi \Rightarrow x \approx 1{,}14 \rightarrow$ mínimo.

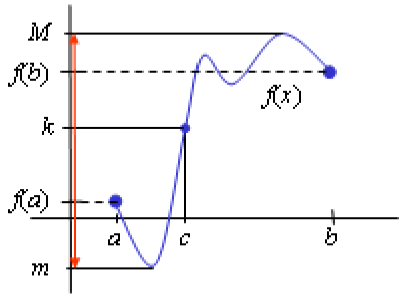


Algunas consecuencias de estos teoremas

Vamos a considerar solamente dos de ellas: el teorema de los valores intermedios y el cálculo de la raíz aproximada de un polinomio.

1. Teorema de los valores intermedios (Darboux)

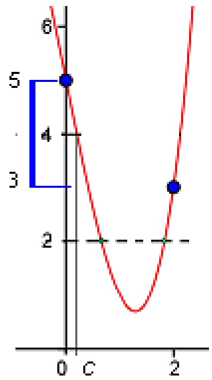
Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces la función toma cada valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.
Esto es, para cualquier número k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) < k < f(b)$, existe un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.



La demostración de esta consecuencia es fácil. Basta con definir otra función $g(x) = f(x) - k$ y aplicarle el teorema de Bolzano.
En efecto: La función $g(x) = f(x) - k$ es continua en $[a, b]$, por ser diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$.
Además, $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, pues $g(a) = k - f(a) > 0$ y $g(b) = k - f(b) < 0$.
Luego, $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. En consecuencia, existe entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.
Pero esto significa que $g(c) = k - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = k$.

<u>Ejemplos</u>:

a) La función $f(x) = \sqrt{x+1}$, es continua en el intervalo [0, 3]. En sus extremos toma los valores $f(0) = 1$ y $f(3) = 2$. Por tanto, la función toma todos los valores entre 1 y 2; por ejemplo, el valor $1{,}83$. (Ese valor lo toma en la solución de la ecuación $1{,}83 = \sqrt{x+1}$, que es $x = 1{,}83^2 - 1 = 2{,}3489$. Es evidente que 2,3489 $\in$ [0, 3]).



b) Dada la función $f(x) = x^3 - 5x + 5$. ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor 4 en algún punto del intervalo [0, 2]? ¿Y el valor 2?
Como la función es continua y en los extremos del intervalo toma los valores $f(0) = 5$ y $f(2) = 3$, se deduce que toma todos los valores entre 3 y 5; en particular el valor 4. Esto es, existirá algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(2) = 4$. (Véase la figura adjunta).
Como 2 no está entre 3 y 5, no puede afirmarse que la función tome ese valor para algún punto del intervalo (0, 2); pero tampoco puede afirmarse que no lo tome. (De hecho hay dos valores que toman el valor 2, que son las soluciones de la ecuación $x^3 - 5x + 5 = 2$).

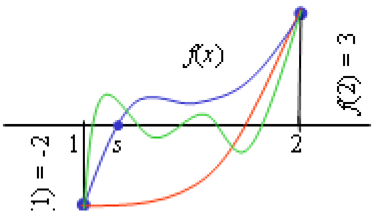
Observación. Este resultado puede ampliarse un poco más, afirmando que "Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función toma cada valor comprendido entre el mínimo y el máximo de $f(x)$ en ese intervalo". Esto es, para cualquier número k comprendido entre m y M, $m < k < M$, existe un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.

Definición. Si f es continua, la imagen de $[a, b]$ será el intervalo $[m, M]$, siendo m y M el mínimo y el máximo de f en $[a, b]$.

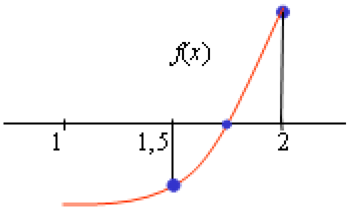
2. Cálculo aproximado de soluciones de una ecuación polinómica

La ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ no tiene soluciones enteras. Por tanto, al ser de tercer grado no sabemos cómo encontrar esas soluciones. No obstante, aplicando el teorema de Bolzano podemos hallar un valor tan próximo a la solución como deseemos. Observa.

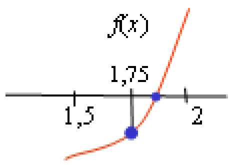
Asociada a la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ puede considerarse la función $f(x) = x^3 - 3x - 1$, que es continua en todo **R**.
Probando, podemos encontrar dos valores de x en los que la función tome distinto signo. En este caso valen, $x = 1$ y $x = 2$, pues $f(1) = -3$ y $f(2) = 1$.
En consecuencia, por Bolzano, existe un valor c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Ese valor es una solución de la ecuación $x^3 - 2x - 1 = 0$.
Para hallarlo hay que hacerlo por tanteo, siendo normal que no encontremos el valor c exacto, pero siempre podemos encontrar un valor x_0 tan próximo a c como se desee.



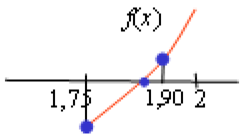
Un buen procedimiento hallar ese valor x_0 consiste en estrechar el intervalo inicial. Para ello se evalúa la función en cualquier punto intermedio, por ejemplo en $x = 1{,}5$, y se reiterara el procedimiento en el intervalo (1, 1,5) o en el (1,5, 2), según convenga.
Como $f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 3\cdot 1{,}5 - 1 = -2{,}125 < 0$, la solución estará entre 1,5 y 2.



Se prueba con 1,75: $f(1{,}75) = 1{,}75^3 - 3\cdot 1{,}75 - 1 = -0{,}890625 < 0$.
Como $f(1{,}75) < 0$ y $f(2) > 0$, la solución está entre esos dos valores.



Se prueba con 1,90: $f(1{,}90) = 1{,}90^3 - 3\cdot 1{,}90 - 1 = 0{,}159 > 0$. La solución está entre 1,75 y 1,90.



Se prueba con 1,85: $f(1{,}85) = 1{,}85^3 - 3\cdot 1{,}85 - 1 = -0{,}218375 < 0$. La solución está entre 1,85 y 1,90.

Se prueba con 1,88: $f(1{,}88) = 1{,}88^3 - 3\cdot 1{,}88 - 1 = 0{,}004672 > 0$. La solución está entre 1,85 y 1,88, y muy cerca de 1,88.

Se prueba con 1,87: $f(1{,}87) = 1{,}87^3 - 3\cdot 1{,}87 - 1 = -0{,}070797 < 0$. La solución está entre 1,87 y 1,88.
Con esto, ya tenemos acotada la solución con una aproximación de milésimas: es un valor entre 1,870 y 1,880.
Si esta aproximación es suficiente, podemos asignarle a c un valor intermedio y decir: $c \approx 1{,}878$; o quedarnos con 1,88 cuya aproximación es bastante buena.