

## Algo de lógica de proposiciones

Una proposición es una frase (enunciado) cuya verdad o falsedad puede ser probada. Una proposición puede ser verdadera o falsa, V o F.

Por ejemplo: “Juan mide más de 170 cm”; “Está lloviendo”.

No son proposiciones, por ejemplo, “Juan, márchate”; “Ojalá llueva mañana”

**Proposiciones equivalentes.** Dos proposiciones son equivalentes cuando en todos los casos toman los mismos valores lógicos. Por ejemplo: “Soy madre” es equivalente a “Soy mujer y tengo un hijo”.

En matemáticas, la equivalencia suele ir ligada a los signos  $=$  y  $\Leftrightarrow$ .

**Negación de una proposición.** Si  $p$  es una proposición, su negación “no  $p$ ”, puede denotarse por  $\neg p$ . Los valores lógicos de  $\neg p$  son los contrarios de los de  $p$ . Esto es, si  $p$  es V,  $\neg p$  es F; y si  $p$  es F,  $\neg p$  es V.

En matemáticas, negar una proposición no es decir lo contrario. Por ejemplo, negar la proposición “todos los alumnos miden más de 170 cm” no es decir: “todos los alumnos miden menos de 170 cm”; sería decir: “algún alumno mide menos de 170 cm”

### Ejemplos:

a) La negación de  $x > 3$  es  $x \leq 3$ .

b) La negación de “todo número impar es primo” es “existe algún número impar que no es primo”.

**Conjunción de dos proposiciones.** Si  $p$  y  $q$  son proposiciones, la conjunción de  $p$  y  $q$ , “ $p \wedge q$ ” o “ $p$  y  $q$ ”, es verdadera sólo cuando ambas lo son. Podría decirse así:  $p \wedge q$ , es verdadera sí, y sólo sí,  $p$  y  $q$  son verdaderas.

La conjunción está ligada a la intersección de conjuntos.

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

### Ejemplos:

a) La conjunción de  $x \leq 5$  y  $x > 3$  es  $3 < x \leq 5$ .

b) Si  $p \equiv$  “palabras que empiezan por p” y  $q \equiv$  “palabras que terminan en a”,  $p \wedge q \equiv$  “palabras que empiezan por p y terminan por a”. Algunas de esas palabras son: pesa, paloma, persiana.

**Disyunción de dos proposiciones.** Si  $p$  y  $q$  son proposiciones, la disyunción de  $p$  y  $q$ , “ $p \vee q$ ” o “ $p$  o  $q$ ”, es verdadera cuando alguna de las dos proposiciones  $p$  o  $q$  es verdadera.

“ $p$  o  $q$ ” significa “ $p$  o  $q$  o ambas”

La disyunción está ligada a la unión de conjuntos.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### Ejemplos:

a) Si  $p \equiv$  “números naturales múltiplos de 3” y  $q \equiv$  “números que terminan en 5”, la disyunción “ $p$  o  $q$ ”  $\equiv$  “los números naturales que son múltiplos de 3 o que terminan en 5”. Algunos de ellos son: 3, 5, 6, ..., 24, 25, ...

b) Si  $p \equiv$  “palabras que empiezan por p” y  $q \equiv$  “palabras que terminan en a”,  $p \vee q \equiv$  “palabras que empiezan por p o terminan por a”. Algunas de esas palabras son: pesa, mesa, palo, paloma, isla...

**Conector condicional:** “ $p$  implica  $q$ ” o “ $p \rightarrow q$ ”; “si  $p$  entonces  $q$ ”

En matemáticas, se llama *implicación* a toda condicional  $p \rightarrow q$  verdadera, en la que  $p$  se supone verdadera: es una relación de causa–efecto entre  $p$  y  $q$ .

(Secuencia V, V, V de la tabla). Se expresa  $p \Rightarrow q$ . La premisa (proposición  $p$ ) se le llama hipótesis. La conclusión (proposición  $q$ ) se llama tesis.

La implicación  $p \Rightarrow q$  se lee  $p$  implica  $q$ , y significa que  $p$  es *condición suficiente* para  $q$ .

En matemáticas, los términos implicación y *teorema* suelen considerarse equivalentes.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

### Ejemplos:

a) Si  $n$  es múltiplo de 6 entonces  $n$  es múltiplo de 3.

b) “Si un triángulo es equilátero, entonces, sus ángulos suman  $180^\circ$ ” no es una implicación, ya que “los ángulos de un triángulo suman  $180^\circ$ ” para cualquier triángulo.

**Conector bicondicional:** “ $p$  es equivalente a  $q$ ” o “ $p \leftrightarrow q$ ”; “ $p$  sí y sólo  $q$ ”

Si  $p \Rightarrow q$  y  $q \Rightarrow p$ , se escribe  $p \Leftrightarrow q$  y lee  $p$  es *equivalente a  $q$* , y significa que  $p$  es *condición necesaria y suficiente* para  $q$  o que “ $p$  sí y sólo  $q$ ”

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

### Ejemplos finales:

1. Sea  $A$  una matriz en la que figura un parámetro  $m$ . De esa matriz sabemos, haciendo los cálculos pertinentes, que no tiene inversa cuando  $m = 1$  o  $m = 3$ . Con esto, indica la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

Para  $m \in \mathbf{R}$ , la matriz  $A$  admite inversa:

- Si  $m = 3$
- Para todo  $m > 3$
- Para todo  $m < 3$ .
- Si  $m \neq 3$
- Si  $m \neq 1$
- Si  $m \in (1, 3)$

V: b) y f)

2. La proposición  $x^2 > x$  es verdadera para  $x = 1,2$ ; es falsa, para  $x = 0,8$ .

Cuando se propone resolver la inequación  $x^2 > x$  se está pidiendo encontrar todos los valores de  $x$  para los que esa proposición es verdadera.

Referencias: “Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real”, Ed THOMSON, Madrid, 2003. F. Galindo y otros.

“Álgebra lineal”, McGraw–Hill, Madrid, 1993. J. de Burgos.

También puede verse: “Matemáticas para el Análisis Económico”, Ed Prentice Hall, K. Sydsaeter,