UAH. MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I (ADE y CYF)

Límites y continuidad **HOJA 3**

Preguntas de tipo test propuestas en exámenes anteriores (Licenciatura)

1. El dominio de $f(x)=\dfrac{x\cdot senx}{2-\cos 2x}$ es:

a) (-4, 0) ∪ (0, +4).

b) (-4, π/2) ∪ (π/2, +4). **c) R**.

Solución:

Como el denominador nunca se anula ($2-\cos 2x>0$ para todo x), del dominio es **R**.

2. La función $f(x) = 6x+\dfrac{a}{(3-x)^2}$, $a \neq 0$, tiene:

a) Una asíntota oblicua y una horizontal.

b) Una asíntota vertical y una oblicua.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La función no está definida en x = 3. En ese punto tiene una A.V., pues:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\left(6x+\frac{a}{(3-x)^2}\right)=\left[18+\frac{a}{0}\right]=\infty$$

Además:

$$\lim_{x\to\infty 3} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(6x+\frac{a}{(3-x)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}6x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{(3-x)^2}\right)\to 6x+0^+$$

La función tiene una asíntota oblicua, la recta $y=6x$

3. (S/98). La función $f(x)=2x+\ln(5+x)$, tiene una asíntota:

a) Oblicua b) Horizontal. **c)** Vertical.

Solución:

La función está definida para x > –5.

La función tiene una asíntota vertical en x = –5, por la derecha, pues:

$$\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+}\left(2x+\ln(5+x)\right)=\left[-10-\infty\right]=-\infty$$

Es evidente que no tiene una A.H. Pero, ¿puede tener una asíntota oblicua?

La asíntota oblicua es la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\ln(5+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\ln(5+x)}{x}\right)=2+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(5+x)}{x}=$$

$$=\ (L´H)=2+\lim_{x\to\infty}\frac{1/(5+x)}{1}=2+0=2;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x+\ln(5+x)-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(5+x)\right)=\infty$$

Como n debe ser distinto de ∞, la función no tiene asíntota oblicua.

4. (E/03) La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ es discontinua en x = 1. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:

a) $f(1) = 2/9$; b) $f(1) = 1$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La función no está definida en x = 1 ni en x = 8. En esos dos puntos es discontinua.

Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+8)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+8}=\dfrac{2}{9}$ la discontinuidad puede evitarse en x = 1, definiendo $f(1)=\dfrac{2}{9}$

5. (S/00). La función $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le a \\ a+2 & x>a \end{cases}$

a) Es discontinua en $x = a$, para cualquier valor de a.

b) Es continua en $x = a$ sólo si $a = 2$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En el punto $x = a$ deben ser iguales los límites laterales.

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} x^2=a^2$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} (a+2)=a+2$$

Como deben ser iguales: $a^2=a+2\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=-1; a=2$.

La función es continua cuando a = –1 o a = 2; y no sólo si a = 2.

6. (F/02) La función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$ tiene y:

a) Una asíntota vertical y otra horizontal.

b) Una asíntota oblicua: la recta $y = 2x + 3$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La asíntota oblicua es la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1}=3$$

La asíntota es la recta $y=2x+3$.

7. (S/02) Para la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ puede afirmarse que:

a) Tiene una asíntota horizontal y otra vertical.
b) Tiene una asíntota horizontal y otra oblicua.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}}{x}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty \Rightarrow$ tiene una A.V., la recta $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}=\left[\dfrac{e^{-\infty}}{+\infty}\right]=\left[\dfrac{0}{+\infty}\right]=0 \Rightarrow$ tiene una A.H., la recta $y = 0$.

(La asíntota es hacia $+\infty$).

8. (S/02) La función $f(x)=e^{-x}+2x+p$ corta dos veces al eje OX en el intervalo [–2, 1]:

a) Si p es negativo.
b) Si $p = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Es evidente que la función es continua en todo **R**. Por tanto, puede aplicarse el teorema de Bolzano.

Si $p = -1$, $f(x)=e^{-x}+2x-1 \Rightarrow$

$$f(-2)=e^{2}-4-1>0 \text{ y } f(1)=e^{-1}+2-1>0$$

No hay evidencia de que corte al el eje OX, pues sus valores en los extremos son ambos positivos. Puede probarse con $x = -1$ y con $x = 0$, para ver qué pasa.

$$f(-1)=e^{1}-2-1<0$$

$\rightarrow$ Como en el intervalo [–2, –1] la función toma signos distintos en los extremos $\Rightarrow$ corta al eje en ese intervalo.

$\rightarrow$ Como en el intervalo [–1, 1] la función toma signos distintos en los extremos $\Rightarrow$ corta al eje en ese intervalo.

Por tanto, corta dos veces.

9. (E/03) 6. La función $f(x)=x^3-3x^2+p$ toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]:

a) Cualquiera que sea el valor de p.
b) Si $p = 5$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

También se puede aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 2].

Como $f(1)=-2+p$ y $f(2)=-4+p$, para que $\sqrt{2}$ esté esos dos valores:

$$-4+p<\sqrt{2}<-2+p \Rightarrow \begin{cases}-4+p<\sqrt{2}\Rightarrow p<4+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}<-2+p\Rightarrow p>2+\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow 2+\sqrt{2}<p<4+\sqrt{2}$$

Como $p = 5$ está entre los valores dados, la respuesta es b).

10. La ecuación $e^{\cos x} - \sin x + x - 3,2 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo:
a) Entre 0 y π/2 radianes.
b) Entre 0 y π radianes.
c) Ninguna de las anteriores.
<u>Solución</u>:
La función $f(x) = e^{\cos x} - \sin x + x - 3,2$ es continua en todo **R**; por tanto, cumple Bolzano.
Como

$$f(0) = e^{\cos 0} - \sin 0 + 0 - 3,2 = e - 3,2 < 0 \text{ y}$$

$$f(\pi/2) = e^{\cos(\pi/2)} - \sin(\pi/2) + \frac{\pi}{2} - 3,2 = 1 - 1 + \frac{\pi}{2} - 3,2 < 0$$

no hay seguridad de que corte en el intervalo [0, π/2].
Como

$$f(0) = e^{\cos 0} - \sin 0 + 0 - 3,2 = e - 3,2 < 0 \text{ y}$$

$$f(\pi) = e^{\cos(\pi)} - \sin(\pi) + \pi - 3,2 = e^{-1} - 0 + \pi - 3,2 > 0$$ (Recuerda: π ≈ 3,14; e ≈ 2,71).

Luego, la función toma signos distintos en los extremos del intervalo [0, π] ⇒ la función corta al eje entre 0 y π ⇒ $e^{\cos x} - \sin x + x - 3,2 = 0$ tiene una raíz en ese intervalo.