

Tema 4. DERIVADAS

Derivada de una función en un punto

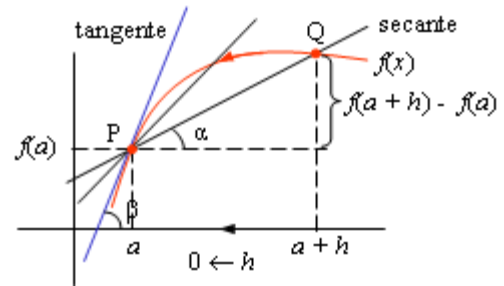
Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si

existe el límite:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite se denota por $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.

La derivada es el límite de un cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la

variable dependiente (la $f(x)$) cuando la variable independiente (la x) pasa de a a $a+h$. El cociente mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra. Cuando se impone que la variable independiente varíe una cantidad infinitesimal (eso indica que $h \rightarrow 0$), lo que se está calculando es la tasa de variación instantánea de la función $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, qué le pasa a $f(x)$ cuando varía x en los alrededores de un punto a .



Ejemplo:

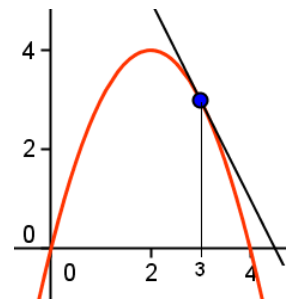
Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -h^2 - 2h + 3$ y $f(3) = 3$, se tendrá:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h-2) = -2. \end{aligned}$$

Luego, $f'(3) = -2$. (Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre ambas variables vale -2 .)



Interpretación geométrica de la derivada

La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

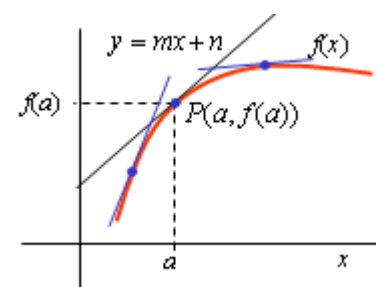
La ecuación de dicha recta tangente será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Observaciones: 1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.

2. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.

3. Se recordará que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable x .



Ejemplo:

La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

Y como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene: $y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9$.

Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

1. Que la función sea continua en dicho punto.
2. Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

Derivadas laterales

Izquierda: $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Derecha: $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Geoméricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.



- Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

Continuidad y derivabilidad

La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:

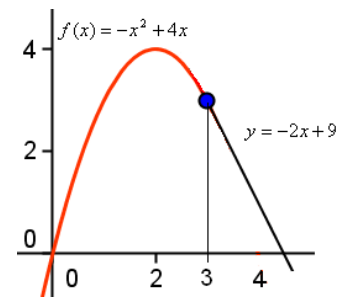
“si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$ ”

El recíproco no es cierto. Esto es, $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$.

Ejemplo:

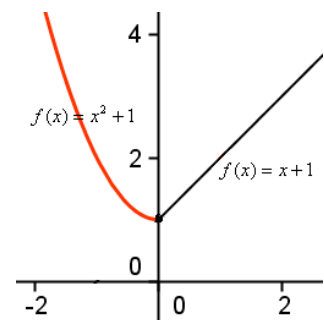
a) La función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 3 \\ -2x + 9 & x > 3 \end{cases}$ es continua y derivable en el

punto donde se unen las funciones a trozos, en $x = 3$. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos. (Recuerda que $y = -2x + 9$ es la recta tangente a $f(x) = -x^2 + 4x$ en $x = 3$.)



b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$, pero no es

derivable en ese punto. (En el punto $x = 0$, la función hace un cambio brusco.)



Función derivada

La función derivada de una función $f(x)$ es una nueva función que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f'(x)$. Su definición es la siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si $y = f(x)$, se escribe $y' = f'(x)$. También es frecuente escribir $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ o $y' = \frac{dy}{dx}$.

Reglas de derivación para las operaciones con funciones

1. Derivada de una constante por una función:

$$F(x) = k \cdot f(x) \rightarrow (F(x))' = (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow (F(x))' = (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

3. Derivada de un producto de funciones:

$$F(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow (F(x))' = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. Derivada de la opuesta de una función:

$$F(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow (F(x))' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

5. Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow (F(x))' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Derivada de la función compuesta:

$$F(x) = f(g(x)) \rightarrow (F(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	Derivada	Función compuesta	Derivada
$y = c$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n, \forall n \in \mathbf{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$y = (f(x))^n, \forall n$	$y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = a^x, a > 0$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}, a > 0$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \text{cos } x$	$y' = -\text{sen } x$	$y = \text{cos } f(x)$	$y' = -f'(x) \text{sen } f(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = f'(x)(1 + \text{tag}^2 f(x))$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

En esta tabla: c, n, a y e son números; x designa la variable independiente e y o f representan funciones de x .

Ejemplos:

1. $f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4.$

2. $f(x) = (-x^2 + 4x)(x^3 - 2x) \Rightarrow f'(x) = (-2x + 4)(x^3 - 2x) + (-x^2 + 4x)(3x^2 - 2).$

3. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2 - 5) - 3x \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-3x^2 - 15}{(x^2 - 5)^2}$

4. $f(x) = (2x^3 - 5x + 3)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(2x^3 - 5x + 3)^3 \cdot (6x^2 - 5)$

5. $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = (x^3 - x^2 + 1)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (3x^2 - 2x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}$$

6. $y = 2 - 7x^3 + \frac{4}{x^5} - 5\sqrt{x} \Rightarrow y' = -7 \cdot 3x^2 + \frac{-4 \cdot 5x^4}{x^{10}} - \frac{5}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -21x^2 - \frac{20}{x^6} - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$

7. $y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \ln 10.$

8. $y = 3^{x^2 - 4x} \Rightarrow y' = (2x - 4) \cdot 3^{x^2 - 4x} \ln 3$

9. $y = e^{2x^3 - 3x} \Rightarrow y' = (6x^2 - 3)e^{2x^3 - 3x}$

10. $y = 2^{-x^3 + 2x} + e^{-0,5x} \Rightarrow y' = (-3x^2 + 2)2^{-x^3 + 2x} \ln 2 - 0,5e^{-0,5x}$

11. $y = \ln(2x^4 - 3x) \Rightarrow y' = \frac{8x^3 - 3}{2x^4 - 3x}.$

12. $y = \log(3x^2 - 5x + 2) \Rightarrow y' = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 2} \log e$

13. $y = \ln((2x - 1)(x^2 - x)) = \ln(2x - 1) + \ln(x^2 - x) \Rightarrow y' = \frac{2}{2x - 1} + \frac{2x - 1}{x^2 - x}$

14. $y = \sin \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$

15. $y = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow y' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x.$

16. $y = \frac{\operatorname{sen} x^2}{5} \Rightarrow y' = \frac{2x \cos x^2}{5}.$

17. $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \cos 5x - \operatorname{tag} x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 15 \operatorname{sen} 5x - (1 + \operatorname{tag} x^2) \cdot 2x.$

18. $y = \cos^2(x^3 - 2x) \Rightarrow y' = -2 \cos(x^3 - 2x) \cdot \sin(x^3 - 2x) \cdot (3x^2 - 2)$

19. $y = \ln \cos x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$

20. $y = \operatorname{arcsen}(x - 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

21. $y = \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) - \operatorname{arccos}(1 - x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} - \frac{-(-2x)}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = 0$

22. $y = \operatorname{arctag}(1 + x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2} = \frac{2x}{2 + 2x^2 + x^4}.$

Observación: Para practicar con más ejercicios, puede verse:

<https://static.squarespace.com/static/526e85b4e4b09c47421bd159/t/52f687ebe4b0430a9908b8b0/1391888363138/T08MPRM2.pdf>

<http://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/Tema-16-Ejercicios-de-derivadas-Sols1.pdf>

Una aplicación económica de la derivada: Marginales

En Economía la derivada tiene múltiples aplicaciones; aquí se aplicará a un caso concreto: al cálculo de costes, ingresos y beneficios marginales.

Si las funciones $C(x)$, $I(x)$ y $B(x)$, designan, respectivamente, el coste, los ingresos y el beneficio que se obtienen por la producción y venta de x unidades de un bien, a sus derivadas, $C'(x)$, $I'(x)$ y $B'(x)$ se les llama coste marginal, ingreso marginal y beneficio marginal.

El coste marginal coincide, aproximadamente, con el coste adicional necesario para producir una unidad más de x . Esto es: $C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$. (Recuérdese que la derivada de cualquier función, $f(x)$, indica, aproximadamente, la variación de f cuando x aumenta una unidad.)

Ejemplos:

a) Si $C(x) = x^2 + 40x + 10000$ (en euros), siendo x el número de unidades producidas de un determinado bien, se tendrá que $C(100) = 24000$ y $C(101) = 24241$. Por tanto, el coste adicional de la unidad 101 es $C(101) - C(100) = 24241 - 24000 = 241$ €

Derivando, $C'(x) = 2x + 40$; luego $C'(100) = 240$ € que es una cantidad aproximada a 241 €

b) Si cada unidad de ese bien se vende por 350 € la función de ingresos será $I(x) = 350x$.

En este caso, el ingreso marginal por la venta de una unidad más es siempre de 350 € lo que coincide con su derivada: $I'(x) = 350$.

Puede observarse que cuando se producen 100 unidades, el ingreso marginal es 109 € mayor que el coste marginal; en consecuencia, resulta rentable producir una unidad más, la 101: el beneficio marginal que se obtiene es de 109 €. ¿Pero eso seguirá así cuando se fabriquen, por ejemplo, 140, 150 o 160 unidades? ¿Hasta qué número conviene aumentar la producción?

c) La función de beneficios es $B(x) = I(x) - C(x)$. En este caso $B(x) = -x^2 + 310x - 10000$. El beneficio marginal es $B'(x) = -2x + 310$.

Para $x = 100$, $B'(100) = -200 + 310 = 110$ €, cantidad próxima a los 109 € reales.

Si $x = 140$, $B'(140) = -280 + 310 = 30$ €. Para $x = 150$, $B'(150) = -300 + 310 = 10$ €. Pero si $x = 160$, $B'(160) = -320 + 310 = -10$ €, el beneficio marginal es negativo: fabricar la unidad 161 es más costoso que los ingresos que se obtienen por su venta: no resulta rentable.

Es evidente que conviene aumentar la producción siempre que el beneficio marginal sea positivo; esto es, siempre que $B'(x) = -2x + 310 \geq 0$.

La solución de esta inecuación es $x \leq 155 \Rightarrow$ No resulta rentable producir más de 155 unidades.

Notas:

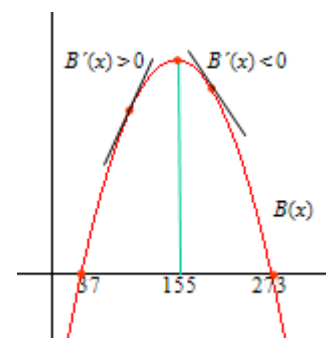
1. Si el beneficio marginal es positivo ($B'(x) > 0$) significa que los beneficios están aumentando al aumentar la producción. Si es negativo, $B'(x) < 0$, significa que los beneficios están disminuyendo al aumentar la producción.

Parece lógico aceptar que conviene producir hasta que $B'(x) = 0$. En ese nivel de producción se obtendrá el máximo beneficio.

2. Que $B'(x) < 0$ no implica que la empresa entre en pérdidas. La empresa perderá cuando $B(x) < 0$; para este ejemplo, cuando

$B(x) = -x^2 + 310x - 10000 < 0$: si la producción es inferior a 37 unidades o superior a 273.

3. Para el ejemplo estudiado es fácil dar una interpretación geométrica, pues como la función beneficio es una parábola, su máximo se obtiene en el vértice; crecen antes del vértice y decrecen después de él. También puede verse que $B(x) > 0$ (beneficios positivos) cuando $x \in (36,6, 273,4)$.

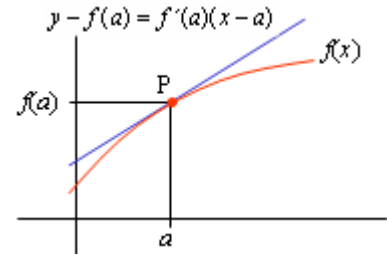


Idea de diferencial de una función

Como se indicó anteriormente, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $P(a, f(a))$, viene dada por

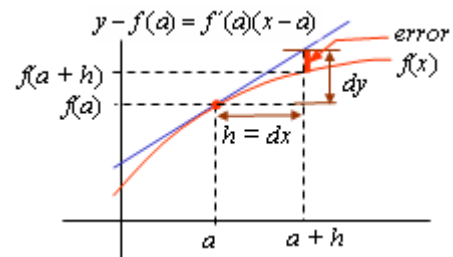
$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Esta recta, cuya pendiente es $f'(a)$, es la función lineal que mejor aproxima a $f(x)$ en un entorno del punto a .



- Se llama diferencial de $f(x)$ en el punto $x = a$ al producto $f'(a) \cdot dx$. Esto es, $dy = df(a) = f'(a)dx$.

En general, si $y = f(x) \rightarrow dy = df(x) = f'(x)dx$



Ejemplos:

a) Para $y = x^3 + 3x^2 - 5x \Rightarrow dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$.

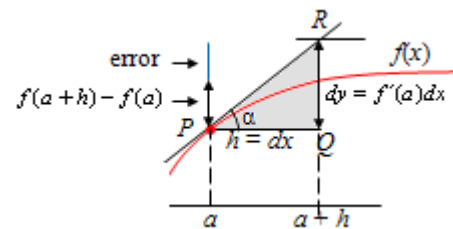
b) Si $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}dx$.

c) Si $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$.

Cuantitativamente, la diferencial da la diferencia de los valores que toma la recta tangente en los puntos a y $a + h = a + dx$ (en general, puntos: x y $x + dx$).

Geoméricamente, la diferencial es el incremento sobre la recta tangente, como puede verse en el triángulo PQR , de la figura

adjunta: $\tan \alpha = \frac{RQ}{PQ} = \frac{dy}{dx} = f'(a) \Rightarrow dy = f'(a)dx$



- Parece evidente que si $dx = h$ es un valor pequeño, también será pequeño el valor de dy , y más pequeña aún, la diferencia entre el valor sobre la curva $f(x)$ y el valor sobre la recta tangente. (En la figura se indica esa diferencia con el nombre de error.)

Esto permite concluir que, en un entorno del punto a , la función $y = f(x)$ y la recta tangente, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, toman valores aproximados: $[y = f(x)] \approx [y = f(a) + f'(a)(x - a)]$

Esto es, haciendo $x = a + h$: $f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$, para h pequeño.

Ejemplo:

Para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$, se procede así:

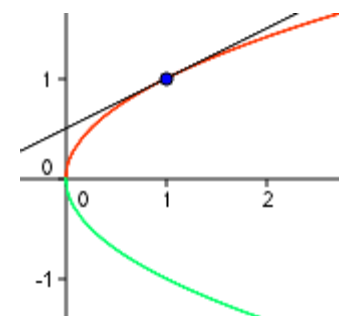
$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \text{si } x = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1/2$$

Luego, la tangente es: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Por tanto, en el punto $x = 1$, la función $y = \sqrt{x}$ puede aproximarse por la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Así, la

raíz cuadrada de 1,1, $\sqrt{1,1} \approx \frac{1}{2} \cdot 1,1 + \frac{1}{2} = 1,05$.

Observación: Lo que se hace es utilizar una función lineal, fácil de manejar, para calcular una raíz cuadrada.



Derivación implícita

Una función está definida implícitamente cuando la variable dependiente no está despejada. Así, la expresión $y^2 + x - 3 = 0$, con $x < 3$ e $y > 0$, define a y como función de x de forma implícita. En este caso, puede despejarse fácilmente, pues

$$y^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 - x \Rightarrow y = \sqrt{3 - x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3 - x}$$

Pares de esta función son, por ejemplo, $(2, 1)$, $(-1, 2)$ o $(-6, 3)$.

La expresión $y^5 - y^3 + 2y - x^2 - x = 0$ también define y como función de x , pero a diferencia del caso anterior, no puede despejarse y .

(Pares de esta función son, por ejemplo, $(0, 0)$ o $(1, 1)$).

En el primer caso, la obtención de la derivada de y es muy fácil:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

También podría calcularse la derivada sin necesidad de despejar, pues si $y = f(x)$, la expresión $y^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 + x - 3 = 0$.

Si se deriva, miembro a miembro, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$2(f(x))f'(x) + 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2f(x)}$$

Normalmente no se sustituye y por $f(x)$, pudiendo derivar directamente así:

$$y^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow 2y \cdot y' + 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2y}$$

Con esto, la derivada en el punto $(2, 1)$ vale $y' = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$; y en el punto $(-6, 3)$, $y' = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$

Aplicando el mismo procedimiento a la expresión $y^5 - y^3 + 2y - x^2 - x = 0$, se tiene:

$$5y^4 y' - 3y^2 y' + y' - 2x - 1 = 0 \Rightarrow y'(5y^4 - 3y^2 + 1) - 2x - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1 + 2x}{5y^4 - 3y^2 + 1}$$

Luego, el valor de la derivada en el punto $(1, 1)$ será $y' = \frac{1 + 2 \cdot 1}{5 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$

Ejemplo:

Si y es una función de x , derivable, que verifica la ecuación $2x^2 + 6xy + y^2 - 18 = 0$, halla y' por derivación implícita. Comprueba que el punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de la ecuación y halla y' en ese punto.

→ Derivando directamente en la expresión $2x^2 + 6xy + y^2 - 18 = 0$ se tiene:

$$4x + 6y + 6xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow 2y'(3x + y) = -2(2x + 3y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + 3y}{3x + y}$$

Observa que el sumando $6xy$ se deriva implícitamente como un producto: $(6xy)' = 6y + 6xy'$

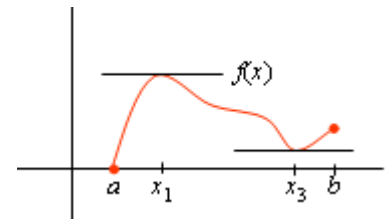
El punto $(1, 2)$ es de la curva, pues $2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 - 18 = 0$.

La derivada en ese punto valdrá: $y'(1, 2) = -\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 2} = -\frac{8}{5}$.

Propiedades de las funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio.

Teorema del máximo. Teorema de Rolle

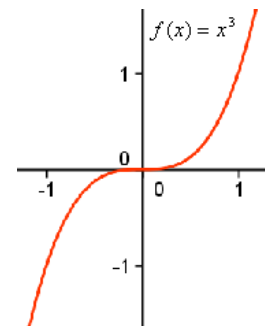
- Se dice que $f(x)$ tiene un **máximo local** (o relativo) en un punto x_1 si $f(x_1) \geq f(x)$, para todo x de un entorno de x_1 .
- Se dice que $f(x)$ tiene un **mínimo local** (o relativo) en un punto x_3 si $f(x_3) \leq f(x)$, para todo x de un entorno de x_3 .



Teorema del máximo

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a, b) . Si x_1 es un máximo de $f(x)$ en dicho intervalo y si $f'(x_1)$ existe, entonces $f'(x_1) = 0$.

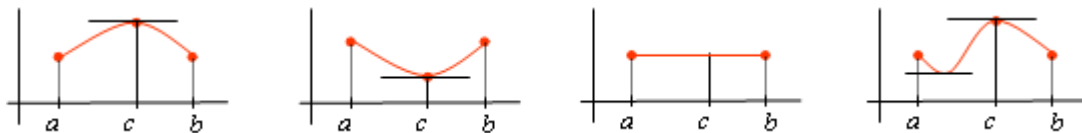
- El recíproco del teorema no es cierto. Esto es, que la derivada sea 0 no asegura que el punto sea máximo. También basta con observar la figura adjunta, en la que se dibuja la gráfica de $f(x) = x^3$. Para esta función la derivada se anula en $x = 0$ y sin embargo en ese punto no hay máximo ni mínimo.



Teorema de Rolle (Francés, 1652/1719)

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y si $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geoméricamente la comprobación es evidente: existe un punto –al menos– de ese intervalo, en el que la tangente a la curva es horizontal.



En ese punto c se da el máximo o el mínimo de $f(x)$ en ese intervalo.

(En el tercer dibujo todos los puntos del intervalo cumplen en teorema; en el cuarto dibujo hay un mínimo y un máximo en el intervalo dado).

Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 1]$, pues:

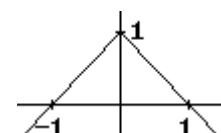
- es continua y derivable en todo \mathbf{R} ; en particular en el intervalo $[-2, 1]$.
- $f(-2) = 4$ y $f(1) = 4$. Esto es, toma el mismo valor en los extremos del intervalo.

En consecuencia, existe un punto $c \in (-2, 1)$ en el que su derivada vale 0:

$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2.$$

El valor $c = -1/2$ es el que asegura el teorema: $f'(-1/2) = 0$.

b) La función $f(x) = 1 - |x|$ no satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$, pues no es derivable en el punto $x = 0$ de ese intervalo. Por eso, aunque tenga máximo en $x = 0$ no se cumple que $f'(0) = 0$.



Teorema del valor medio de Lagrange (Italiano, 1736/1813)

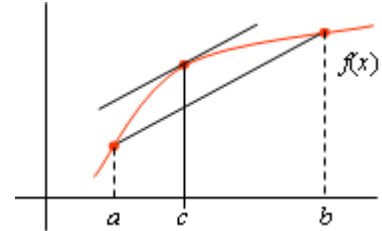
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe algún

punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

- Interpretación geométrica: existe un punto perteneciente al intervalo en el que la tangente a $f(x)$ es paralela a la secante que pasa por los puntos de abscisa a y b .

De otro modo: existe un punto del intervalo en el que la tasa de variación instantánea coincide con la tasa de variación media de todo el intervalo. Recuerda que la tasa de variación media de una función en un intervalo viene dada por la expresión:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- Interpretación física: si se realiza un trayecto a velocidad media v , en algún instante de ese trayecto se ha llevado esa velocidad v .

Ejemplo:

La función $f(x) = x^3 - 6x$ es continua y derivable en el intervalo $[-2, 1] \Rightarrow \exists c, -2 < c < 1$ tal que

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(c).$$

$$\text{En efecto: } \frac{-5 - 4}{1 - (-2)} = 3x^2 - 6 \Rightarrow -3 = 3x^2 - 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1, x = 1.$$

El valor que cumple el teorema es $x = -1$, el número que pertenece a $(-2, 1)$.

Una aplicación. Con las mismas hipótesis, si $x \in (a, b)$, puede escribirse:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(c)(x - a), \text{ con } c \in (a, x)$$

Y si se toma $x = a + h$, se tendrá: $f(x) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, $c \in (a, x)$.

Cuando h es suficientemente pequeño puede aceptarse la aproximación $f(x) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$.

Ejemplo:

Aplicando lo anterior puede darse un valor aproximado de $\sqrt{102}$ sin necesidad de hacer la raíz.

En efecto, si se considera la función $f(x) = \sqrt{x}$, que es continua y derivable para $x > 0$, y se hace $x = 102$, $a = 100$ y $h = 2$, se tiene:

$$f(102) = f(100) + 2 \cdot f'(100 + 2\theta) \Leftrightarrow \sqrt{102} = \sqrt{100} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 + 2\theta}}, \text{ pues } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $f'(100 + 2\theta) = \frac{1}{2\sqrt{100 + 2\theta}} \approx \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0,05$, el valor aproximado pedido será:

$$\sqrt{102} = \sqrt{100} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 + 2\theta}} \approx 10 + 2 \cdot 0,05 = 10,1$$

Notas:

1. El valor obtenido con la calculadora es: $\sqrt{102} = 10,0995\dots$ La aproximación es muy buena.
2. Puede observarse que aplicando la diferencial (véase) se llega al mismo resultado.

Teorema de Cauchy (Francés, 1789/1857)

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , y si $g(b) \neq g(a)$, y $f'(x)$ y $g'(x)$ no son ceros a la vez, entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Con las mismas hipótesis, si tomamos $a < x < b$, existirá un punto $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow [f(x) - f(a)]g'(c) = [g(x) - g(a)]f'(c)$$

Aplicación al cálculo de límites. Regla de L'Hôpital (Francés, 1661/1704)Indeterminaciones:

En el cálculo de límites pueden aparecer siete expresiones (formas) indeterminadas. Son:

$$\left[\frac{0}{0} \right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [1^\infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

Hasta ahora, cuando se presentaba alguna de esas indeterminaciones, se resolvían, si era posible, mediante transformaciones algebraicas. Sirva como recordatorio el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

A partir de ahora podremos emplear otro procedimiento más eficaz y que, además, puede utilizarse para una mayor variedad de funciones. Este procedimiento se sirve de las derivadas y recibe el nombre de regla de L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\frac{0}{0} \right]$

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$ y de que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones derivables en un entorno de a , se cumple:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, siendo $g(x) \neq 0$ en un entorno de a , entonces, si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Esto es válido si a se sustituye por a^+ , a^- , $+\infty$, o $-\infty$.)

- Esto es, “el límite de un cociente del tipo $[0/0]$ es igual al límite del cociente de las derivadas”

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

ERROR: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot x - x \cdot \sin x}{x^2} = (?) \rightarrow$ **OJO**: NO se hace la derivada del cociente.

b) La regla también se puede aplicar a funciones racionales. Así:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{2x - 3} = \frac{1}{-1} = -1$$

Observación: La regla de L'Hôpital puede reiterarse. Así, en el ejemplo:

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ se cumple:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces, si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

y se cumple que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Esto es válido si a se sustituye por a^+ , a^- , $+\infty$, o $-\infty$.)

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

c) También se puede aplicar para funciones racionales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 3x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow (L'H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 3}{8x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (L'H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Resolución de las formas $[0 \cdot \infty]$ e $[\infty - \infty]$

Para resolver las indeterminaciones del tipo $[0 \cdot \infty]$ e $[\infty - \infty]$ hay que transformarlas, operando previamente, en alguna de las formas $\left[\frac{0}{0} \right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Si ese propósito se consigue, entonces se aplica la regla de L'Hôpital.

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \cot ax) = [0 \cdot \infty]. \text{ (Recuerda que } \cot ag 0 = 1/\tan 0 = 1/0 = \infty \text{)}$$

Sustituyendo $\cot ag x$ por $1/\tan x$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \cos x) \cot ax) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \left[\frac{0}{0} \right] = (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \tan^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = [\infty - \infty].$$

Haciendo la resta indicada se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)x} = \left[\frac{0}{0} \right] = (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x x + e^x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = (L'H) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x x + 2e^x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolución de las formas $[1^\infty]$, $[0^0]$ y $[\infty^0]$

Si al intentar calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ aparece alguna de estas formas (esto es: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = [1^\infty]$, o

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = [0^0]$, o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = [\infty^0]$) se calculará, si se puede, el límite $\lim_{x \rightarrow a} (\ln(f(x)))$. Con esto, la indeterminación inicial se transforma en otra del tipo $[0 \cdot \infty]$, que se resolverá como se ha indicado antes.

Una vez resuelto, si $\lim_{x \rightarrow a} (\ln(f(x))) = L$, se tiene que el límite buscado vale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^L$.

Recuerda:

1. Los límites cumplen la siguiente propiedad: $\lim_{x \rightarrow a} \ln[f(x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$.

2. Por definición: $\ln A = L \Leftrightarrow A = e^L$;

y también: $\ln(B^p) = p \cdot \ln B$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= [1^\infty] \rightarrow \text{Aplicando logaritmos: } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = [\infty \cdot 0] = \\ &= (\text{transformando}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

NOTA: Este resultado suele tomarse como definición de e .

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= [0^0] \rightarrow \text{Aplicando logaritmos: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \\ &= (\text{transformando}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4)^{1/\ln x} &= [\infty^0] \rightarrow \text{Aplicando logaritmos:} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (x^2 + 4)^{1/\ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} \ln (x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (x^2 + 4)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (\text{L'H}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x/(x^2 + 4)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (\text{L'H}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4)^{1/\ln x} = e^2$.

Observación: Más ejercicios en:

<https://static.squarespace.com/static/526e85b4e4b09c47421bd159/t/53b81d64e4b087906dff2ae2/1404575076965/T08CALDERPR.pdf>. (Problemas 51 a 64).