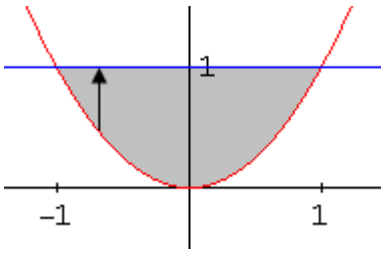
ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS DE INTEGRALES DOBLES

1. Calcula $\iint_D x^2 y\,dxdy$, siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, y\le 1,\ y\ge x^2\right\}$.

Sol.
El recinto es el representado en la figura adjunta.
Por tanto,



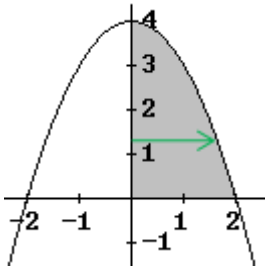
$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} x^2 y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^7}{14}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{21}$$

2. Halla $\iint_S xe^{-y}\,dydx$, siendo S la región del plano encerrada entre la curva $y=4-x^2$ y el eje OX en el intervalo [0, 2].

Sol.

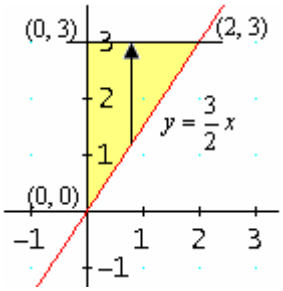


$$\iint_S xe^{-y}\,dydx = \int_0^2\int_0^{4-x^2} xe^{-y}\,dydx = \int_0^2 (-xe^{-y})\Big|_0^{4-x^2} dx =$$

$$= \int_0^2 (-xe^{x^2-4}+x)dx = \left(-\frac{1}{2}e^{x^2-4}+\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = \frac{3+e^{-4}}{2}$$

3. Halla $\iint_D (2x+y)\,dydx$, siendo D el triángulo de vértices (0, 0), (0, 3) y (2, 3).

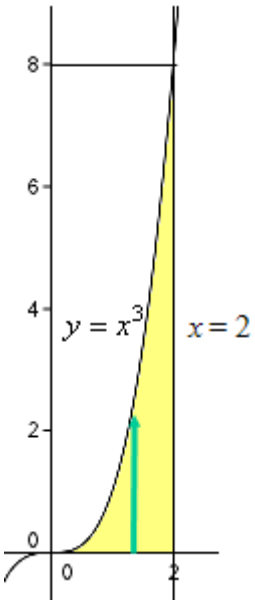
Sol.
El recinto es el de la figura:



$$\iint_D (2x+y)\,dydx = \int_0^2\int_{3x/2}^{3}(2x+y)dydx = \int_0^2\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{3x/2}^{3} dx =$$

$$= \int_0^2\left(6x+\frac{9}{2}-\frac{33}{8}x^2\right)dx = \left(3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{11}{8}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 12+9-11=10$$

4. Calcula $\iint_D (x+y)\,dydx$, siendo D el recinto limitado por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$.



Sol.
El recinto es el representado en la figura adjunta.
Por tanto:

$$\iint_D (x+y)\,dydx = \int_0^2 \int_0^{x^3} (x+y)dydx = \int_0^2 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_0^{x^3} dx =$$

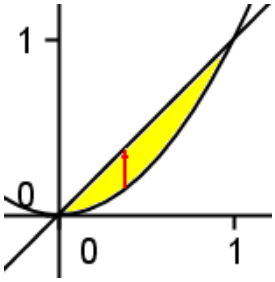
$$= \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{2}x^6 \right) dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{14}x^7 \right)\Big|_0^2 = \frac{544}{35}$$

5. Calcula $\iint_D 6xy\,dydx$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y = x^2$ e $y = x$.

Sol

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 6xydydx = \int_0^1 \left(3xy^2\right)\Big|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^3 - 3x^5\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^6 \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$



6. Determinar el volumen del sólido de paredes verticales, limitado por arriba por $f(x,y) = xy$, y por abajo por el recinto plano encerrado entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

Sol:
El recinto es el dibujado en el problema anterior.

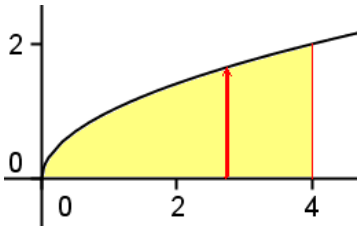
$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xydydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right)\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

7. Calcula $\iint_D x\,dydx$, siendo D el recinto limitado por $y = +\sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

Sol.

$$\iint_D x\,dydx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} xdydx = \int_0^4 (xy)\Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^4 x^{3/2} dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{64}{5}$$

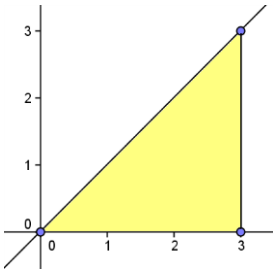


8. Calcula $\iint_D 2xyf(x,y)dydx$, siendo $f(x,y)=e^{y^2-x^2}$ y D el triángulo de vértices (0, 0), (3, 3) y (3, 0).

Sol:

$$\iint_D 2xyf(x,y)dydx=\int_0^3\int_0^x 2xye^{y^2-x^2}dydx=\int_0^3 (xe^{y^2-x^2})\Big|_0^x dx=$$

$$=\int_0^3 (x-xe^{-x^2})dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^3=4+\frac{e^{-9}}{2}$$

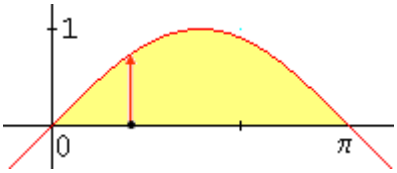


9. Halla $\iint_S 2dxdy$, siendo S la región del plano encerrada entre la curva $y=\operatorname{sen} x$ y el eje OX en el intervalo [0, π].

Sol.

$$\iint_S 2dxdy=\int_0^\pi\int_0^{senx} 2dydx=$$

$$=\int_0^\pi (2y)\Big|_0^{senx}dx=\int_0^\pi (2senx)dx=(-2\cos x)\Big|_0^\pi=4$$

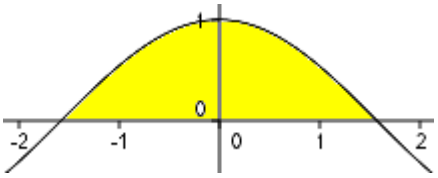


10. Halla el valor de la integral $\iint_S 2dxdy$, siendo S la región del plano encerrada entre la curva $y=\cos x$ y el eje OX en el intervalo [−π/2, π/2].

Sol.

$$\iint_S 2dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos x} 2dydx=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2y)\Big|_0^{\cos x}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos x)dx=(2\sin x)\Big|_{-\pi 2}^{\pi/2}=4$$



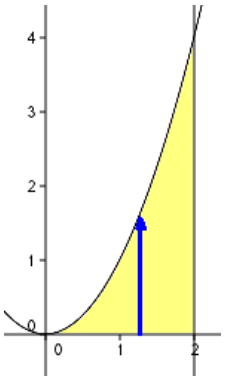
11. Calcula el valor de la integral $\iint_D (x+y)\,dydx$, siendo D el recinto limitado por $y=x^2$, $y=0$ y $x=2$.

Sol.

$$\iint_D (x+y)\,dydx=$$

$$=\int_0^2\int_0^{x^2}(x+y)dydx=\int_0^2\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{x^2}dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^3+\frac{1}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{36}{5}$$

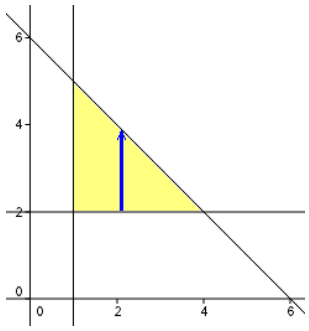


12. Halla el volumen bajo la gráfica de $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ y sobre la región R: $\{0 \le x \le 1;\ 1 \le y \le 2\}$.

Sol.

$$V=\int_0^1\int_1^2 \frac{x}{y}\,dydx=\int_0^1 (x\ln y)\Big|_1^2 dx=\int_0^1 (x\ln 2)dx=\frac{x^2\ln 2}{2}\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$$

13. Calcula el valor de $\iint_D e^{x+y}\,dydx$, siendo D el recinto limitado por las rectas $x = 1$, $y = 2$ e $y = 6 - x$.



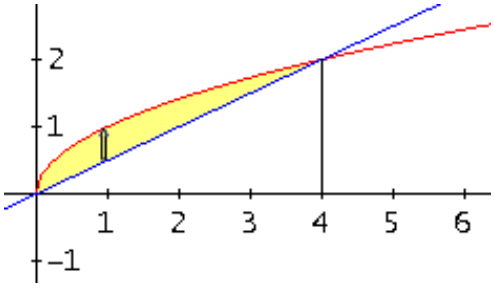
Sol.

$$\iint_D e^{x+y}\,dydx = \int_1^4\int_2^{6-x} e^{x+y}dydx=\int_1^2 \left(e^{x+y}\right)\Big|_2^{6-x} dx=$$

$$=\int_1^4 (e^6-e^{x+2})dx=\left(xe^6-e^{x+2}\right)\Big|_1^4=2e^6-e^3$$

(J10) Problema 3. (1 punto).
Determina el volumen del sólido de paredes verticales, limitado por arriba por $f(x,y)=2x^2y$ y por abajo por el recinto plano encerrado entre la recta $y=\dfrac{1}{2}x$ y la parábola $y=+\sqrt{x}$.

Solución:
El recinto es el representado.



El volumen viene dado por:

$$\int_0^4\int_{x/2}^{\sqrt{x}} 2x^2y\,dydx = \int_0^4 \left(x^2y^2\right)\Big|_{x/2}^{\sqrt{d}} dx = \int_0^4 \left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big| dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{20}\right)\Big|_0^4=\frac{64}{5}$$