EXAMEN DE MATEMÁTICAS II **BACHILLERATO**
EXAMEN FINAL

1. (1,5 puntos) Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx + 2z = 0 \\ ky - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde *k* es una constante e *I* es la matriz identidad de orden 2.
a) (0,5 puntos) Determina los valores de *k* para los que *B* no tiene inversa.
b) (0,5 puntos) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

3. a) (0,5 puntos) Halla la recta *r* que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$.
b) (0,5 puntos) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que pasa por los puntos *A*(1, 0, 0) y *B*(–1, –3, –4).
c) (0,8 puntos) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) (0,7 puntos) Calcula la distancia del punto *A*(1, 0, 0) al plano π´ que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es paralelo a π.

4. (0,8 puntos) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

5. (0,7 puntos) Halla el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$.

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$:
a) (0,7 puntos) Determina su dominio y sus asíntotas. Justifica las respuestas.
b) (0,5 puntos) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene algún punto de inflexión?
b) (0,3 puntos) Haz un esbozo de su gráfica.

7. (1 punto) Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

8. a) (0,5 puntos) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.
b) (0,5 puntos) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente la probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

Alcalá de Henares, 14 de mayo de 2018.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II BACHILLERATO
EXAMEN DE ANÁLISIS (DERIVADAS E INTEGRALES) Y DE PROBABILIDAD

1. (4). (1 punto) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

2. (5). (1 punto) Halla el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$.

3. (6). (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$:

a) (0,8 puntos) Determina su dominio y sus asíntotas. Justifica las respuestas.
b) (0,8 puntos) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene algún punto de inflexión?
b) (0,4 puntos) Haz un esbozo de su gráfica.

4. (7). (1 punto) Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

5. (1 punto) Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

6. (2 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) (0,5 puntos) $\int 3x\left(4-5x^3\right)dx$.   b) (0,3 puntos) $\int \cos\frac{2x-1}{3}dx$.

c) (1,2 puntos) $\int e^{2x}\cos x\, dx$.

7. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P\left(A\cup B\right) = 0,9$.

a) (0,5 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) (0,5 puntos) Calcula $P\left(A-B\right)$ y $P\left(A/\overline{B}\right)$. (Nota: $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B).

8. (8). a) (0,5 puntos) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.
b) (0,5 puntos) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente la probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

Alcalá de Henares, 14 de mayo de 2018

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II **BACHILLERATO**
EXAMEN DE PROBABILIDAD

1. (7). Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P\left(A \cup B\right) = 0,9$.

a) (0,6 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) (1,4 puntos) Calcula $P\left(A - B\right)$ y $P\left(A / \overline{B}\right)$. (Nota: $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B).

2. (8). a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. (0,5 puntos)
a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. (0,5 puntos)

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. (0,5 puntos)
b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. (0,5 puntos)

3. Para una distribución normal $N(60, 5)$, determina el valor de k que cumple:

a) (0,5 puntos) $P\left(X < k\right) = 0,90$

b) (0,5 puntos) $P\left(X > k\right) = 0,95$

c) (1 punto) $P\left(60 - k < X < 60 + k\right) = 0,9544$

4. Supongamos que la estatura de los jóvenes de 20 años de una determinada región sigue una distribución normal de media 175 cm. Si se sabe además que los jóvenes que miden más de 190 cm representan el 6,68 % del total, calcula:
a) (1 punto) La desviación típica de la población considerada.
b) (0,5 puntos) El porcentaje de jóvenes con estatura superior a 165 cm.

5. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:
a) (0,5 puntos) No acierte ninguna respuesta correcta.
b) (1 punto) Acierte 6 o más preguntas.

6. (1,5 puntos) Un examen de respuesta múltiple consta de 80 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte 25 o más preguntas? ¿Y menos de 10?

Alcalá de Henares, 14 de mayo de 2018.

SOLUCIONES EXAMEN FINAL

1. (1,5 puntos) Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx \quad +2z=0 \\ \quad ky-z=k \\ x+3y+z=5 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)=M$.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=k(k+3)-2k=k^2+k=k(k+1) \Rightarrow |A|=0 \text{ si } k=0 \text{ o } k=-1$$

Por tanto:

- Si $k \neq 0, -1$, el r(A) = 3 y el sistema será compatible determinado.
- Si $k = 0$, se tiene:

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)=M$, siendo r($A$) = 2 = r($M$), pues $C1$, $C2$ y $C4$ son proporcionales. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $k = -1$, se tiene:

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)=M$, con r($A$) = 2 y r($M$) = 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}=4$.

Luego, el sistema será incompatible.

2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde *k* es una constante e *I* es la matriz identidad de orden 2.

a) (0,5 puntos) Determina los valores de *k* para los que *B* no tiene inversa.

b) (0,5 puntos) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

Solución:

a) $B=A-kI=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix}$.

La matriz no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$\begin{vmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix}=(-3-k)(-1-k)-2=0 \Rightarrow k^2+4k+1=0 \Rightarrow k=-2+\sqrt{3} \text{ o } k=-2-\sqrt{3}$$

b) Si $k = -1$, la matriz es $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; que tiene inversa, pues $|B|=-2$.

Su inversa es $B^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) (0,5 puntos) Halla la recta *r* que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$.
b) (0,5 puntos) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que pasa por los puntos *A*(1, 0, 0) y *B*(–1, –3, –4).
c) (0,8 puntos) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) (0,7 puntos) Calcula la distancia del punto *A*(1, 0, 0) al plano π´ que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es paralelo a π.

Solución:

a) La recta *r* queda definida por *P*(1, –1, –2) y el vector $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, 3), normal al plano π.

Su ecuación es: $r:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

b) La recta *s* está determinada por el punto *A*(1, 0, 0) y por el vector ***AB*** = (–1, –3, –4) – (1, 0, 0) = (–2, –3, –4).

Su ecuación es: $s:\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = \quad -3h \\ z = \quad -4h \end{cases}$.

c) Para determinar la posición relativa de ambas rectas hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r$ = (1, 2, 3), $\vec{v}_s$ = (–2, –3, –4) y ***AP*** = (1, –1, –2) – (1, 0, 0) = (0, –1, –2).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2\cdot(-1) = 0$ □ los vectores son linealmente dependientes; lo que indica que las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema: $r:\left\{\begin{matrix} x = 1 + t & x = 1 - 2h \\ y = -1 + 2t \;\equiv & y = -3h \\ z = -2 + 3t & z = -4h \end{matrix}\right\}: s$.

$\begin{cases} 1 + t = 1 - 2h \\ -1 + 2t = -3h \\ -2 + 3t = -4h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ h = -1 \end{cases}$ → Punto de corte: *C*(3, 3, 4).

d) El plano π´ está determinado por el vector normal a él, que es $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, 3), y por el punto *P*(1, –1, –2).

Su ecuación es: $\pi' \equiv (x-1) + 2(y+1) + 3(z+2) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0$.

La distancia de *A* a π´ es:

$$d(A, \pi') = \left| \frac{1+7}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

4. (0,8 puntos) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

Solución:

La parábola debe pasar por el punto (1, 1) $\Rightarrow 1 = 1 + b + c \Rightarrow c = -b$.

La derivada en el punto de abscisa $x = 1$ debe valer 1, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

Como $y' = 2x + b \Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \to c = 1$.

La parábola buscada es $y = x^2 - x + 1$.

5. (0,7 puntos) Halla el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{2\sin x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{2\cos x \cos x - 2\sin x \sin x} = \frac{2}{2} = 1.$$

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$:

a) (0,7 puntos) Determina su dominio y sus asíntotas. Justifica las respuestas.

b) (0,5 puntos) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene algún punto de inflexión?

b) (0,3 puntos) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) Dominio = **R** – {0}. Es evidente que en $x = 0$ tiene una asíntota vertical.

→ Como $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua.

También puede obtenerse aplicando límites:

$$\underset{x\to\infty}{lím} \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{1 - x^2}{x^2} = -1 = m \quad \text{y} \quad \underset{x\to\infty}{lím} (f(x) - mx) = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{1}{x} = 0 = n$$

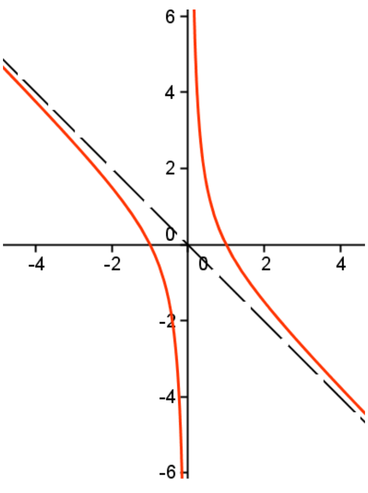
b) Derivando:

$$f'(x) = \frac{-1 - x^2}{x^2} < 0 \text{ para todo } x \text{ de su dominio.}$$

Es decreciente en todo su dominio.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \text{ para todo } x \text{ de su dominio.}$$

No tiene puntos de inflexión.



→ Aunque no se pide, podría verse que:

$f'' < 0$ si $x < 0$: cóncava (∩); $f'' > 0$ si $x > 0$: convexa (∪).

c) Teniendo en cuenta sus asíntotas y que siempre es decreciente puede trazarse la gráfica adjunta. Algunos puntos:

(–1, 0); (1, 0); (–2, 3/2); (2, –3/2); (–3, 8/3); (3, –8/3)

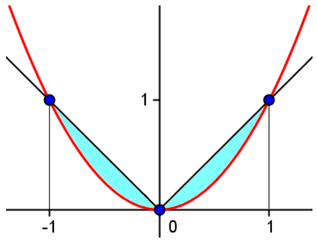
7. (1 punto) Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

Solución:

Las curvas se cortan cuando $x^2 = |x|$.

Sus soluciones son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

Sus gráficas son las adjuntas; pueden representarse dando valores: (–1, –1); (0, 0); (1, 1).



Por tanto:

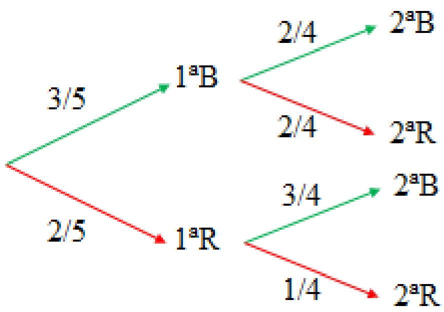
$$S = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ \text{u}^2$$

8. a) (0,5 puntos) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0,5 puntos) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente la probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

Solución:

a) La secuencia y las respectivas probabilidades son las que se indican en el diagrama de árbol adjunto.



Por la probabilidad total:

$$P(2^a B) = P(1^a B)\cdot P(2^a B/1^a B) + P(1^a R)\cdot P(2^a B/1^a R) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

b) Si la varianza es 4 ⇒ σ = 2. La distribución es una normal $N(5, 2)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-5}{2}$.

Por tanto:

$$P(X < 4{,}5) = P\left(Z < \frac{4{,}5-5}{2}\right) = P(Z < -0{,}25) = 1 - P(Z < 0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = 0{,}4013.$$

SOLUCIONES EXAMEN DE ANÁLISIS Y DE PROBABILIDAD

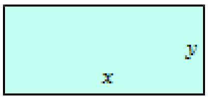
Ya hechas: **1. (4)**; **2. (5)**; **3. (6)**; **4. (7)**; **8. (8)**.

5. (1 punto) Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

Solución:

Sean x e y los lados del rectángulo.

Se desea que la suma $S = x + x + y = 2x + y$ sea mínima, con la condición de que $A = xy = 1$.



Despejando y sustituyendo: $y = \frac{1}{x} \to S(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

Para que S sea mínima: $S' = 0$, $S'' > 0$.

$$S'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $S''(x) = \frac{2}{x^3}$, cumple que $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, para ese valor se da el mínimo buscado.

Por tanto, las medidas de los lados serán: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.

6. (2 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) (0,5 puntos) $\int 3x\left(4-5x^3\right)dx$ b) (0,3 puntos) $\int \cos\frac{2x-1}{3}dx$

c) (1,2 puntos) $\int e^{2x}\cos x\, dx$.

Solución:

Las dos primeras son inmediatas: basta con ajustar constantes.

a) $\int 3x\left(4-5x^3\right)dx = \int\left(12x-15x^4\right)dx = 6x^2 - 3x^5 + c$.

b) $\int \cos\frac{2x-1}{3}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2}{3}\cos\frac{2x-1}{3}dx = \frac{3}{2}\sin\frac{2x-1}{3} + c$.

c) La integral $\int e^{2x}\cos x\, dx$ hay que hacerla por partes.

Si se toma:

$u = e^{2x}$ y $\cos x dx = dv$, se tiene: $du = 2e^{2x}dx$; $v = \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \int e^{2x}\cos x\, dx = e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\, dx$.

La segunda integral, $\int 2e^{2x}\sin x\, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando:

$u = 2e^{2x}$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = 4e^{2x}dx$ y $-\cos x = v$.

Luego,

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - \left(-2e^{2x}\cos x + \int 4e^{2x}\cos x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x \Rightarrow \int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right) + c$$

7. (Galicia, septiembre 17)

Sean *A* y *B* dos sucesos con $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A\cup B) = 0{,}9$.

a) (0,5 puntos) ¿Son *A* y *B* sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) (0,5 puntos) Calcula $P(A-B)$ y $P\left(A/\overline{B}\right)$. (Nota: $\overline{B}$ denota el suceso complementario de *B*).

Solución:

a) Los sucesos *A* y *B* son independientes si se cumple que $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Como $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$, sustituyendo los datos del problema se tiene:

$$0{,}9 = 0{,}7 + 0{,}6 - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 0{,}4.$$

Como $P(A)\cdot P(B)$ = 0,6 · 0,7 = 0,42 ≠ 0,4, los sucesos no son independientes.

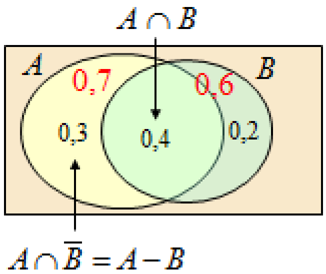
b) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A-B)$ = 0,7– 0,4 = 0,3.

Puede observarse que $P(A-B) = P\left(A\cap\overline{B}\right)$.

Por la probabilidad condicionada:

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$

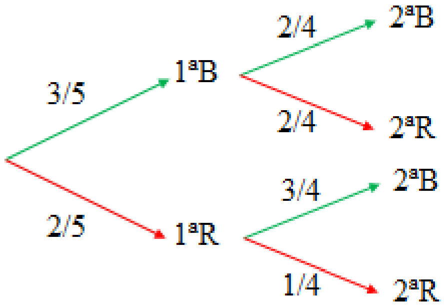
En este caso conviene hacer un diagrama de Venn.



Soluciones Probabilidad

1. (7). Ya vista.

2. (8). Castilla–La Mancha, septiembre 17
a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. (0,5 puntos)
a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. (0,5 puntos)
b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. (0,5 puntos)
b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. (0,5 puntos)
Solución:
a) La secuencia y las respectivas probabilidades son las que se indican en el siguiente diagrama de árbol.



a1) $P(2^a B) = P(1^a B)\cdot P(2^a B/1^a B) + P(1^a R)\cdot P(2^a B/1^a R) =$
$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

a2) $P(1^a R/2^a B) = \dfrac{P(1^a R)\cdot P(2^a B/1^a R)}{P(2^a B)} = \dfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{12}{20}} = \dfrac{1}{2}$.

b) Si la varianza es 4 $\Rightarrow \sigma = 2$. La distribución es una normal $N(5, 2) \to$ Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-5}{2}$.

b1) $P(X < 4{,}5) = P\left(Z < \dfrac{4{,}5-5}{2}\right) = P(Z < -0{,}25) = 1 - P(Z < 0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = 0{,}4013$.

b2) Sea m el número de minutos buscado.

$$P(X < m) = 0{,}33 \Rightarrow P\left(Z < \frac{m-5}{2}\right) = 0{,}33 \Rightarrow \frac{m-5}{2} = -0{,}44 \Rightarrow m = 4{,}12 \text{ minutos.}$$

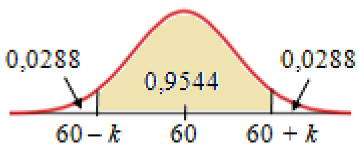
Observación:
En la tabla normal usual no aparecen valores de probabilidad inferiores a 0,5. Los valores de Z correspondientes a probabilidades inferiores a 0,5 hay que calcularlos atendiendo a la simetría de la curva normal. Así, por ejemplo:
– Como $P(Z < 0{,}58) = 0{,}7190 \Rightarrow P(Z < -0{,}58) = 1 - P(Z < 0{,}58) = 1 - 0{,}7190 = 0{,}2810$.
– Como $P(Z < z_0) = 0{,}7190 \Rightarrow z_0 = 0{,}58$, se tendrá que el valor de z_0 tal que $P(Z > z_0) = 1 - 0{,}7190 = 0{,}2810$ será el mismo $z_0 = 0{,}58$. Y el valor de z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0{,}2810$ será $z_0 = -0{,}58$.
En el problema que nos interesa, para encontrar $P(X < m) = 0{,}33$ se busca $P(Z < z_0) = 0{,}33$, que como sabemos no aparece en la tabla.
El valor que debe buscarse es $P(Z < z_0) = 0{,}67$; se obtiene $z_0 = 0{,}44$. Por tanto, el valor de z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0{,}33$ será $z_0 = -0{,}44$.

3. Para una distribución normal *N*(60, 5), determina el valor de *k* que cumple:
a) (0,5 puntos) $P(X<k)=0,90$
b) (0,5 puntos) $P(X>k)=0,95$
c) (1 punto) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$
<u>Solución</u>:
En todos los casos hay que tipificar la variable: $Z=\dfrac{X-60}{5}$. Con esto:

a) $P(X<k)=0,90 \Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{k-60}{5}\right)=0,90 \Rightarrow \dfrac{k-60}{5}=1,28 \Rightarrow k=66,4$.

b) $P(X>k)=0,95 \Leftrightarrow P\left(Z>\dfrac{k-60}{5}\right)=0,95 \Rightarrow \dfrac{k-60}{5}=-1,645 \Rightarrow k=51,775$.
Recordar que $P(Z>z_0)=P(Z<-z_0)=0,95 \Rightarrow -z_0=1,645$.

c) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$ $\Rightarrow$ la probabilidad que cae fuera de ese intervalo es 1 – 0,9544 = 0,0456; la mitad (0,0228) en la cola de la izquierda de la campana, la otra mitad en la cola derecha.
Por tanto, $P(X<60+k)=0,9544+0,0288=0,9772$.



Luego:
$$P(X<60+k)=0,9772 \Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{60+k-60}{5}\right)=0,9772 \Rightarrow \dfrac{k}{5}=2 \Rightarrow k=10.$$
Esto es, en el intervalo (50, 70) = (60 –2σ, 60 + 2σ) caen el 95,44% de los valores de *X*, *N*(60, 5).

4. Supongamos que la estatura de los jóvenes de 20 años de una determinada región sigue una distribución normal de media 175 cm. Si se sabe además que los jóvenes que miden más de 190 cm representan el 6,68 % del total, calcula.
a) (1 punto) La desviación típica de la población considerada.
b) (0,5 puntos) El porcentaje de jóvenes con estatura superior a 165 cm.
<u>Solución</u>:
a) Se trata de una población *N*(175, σ). Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-175}{\sigma}$.
Se sabe que
$$P(X>190)=0,0668 \Rightarrow P\left(Z>\dfrac{190-175}{\sigma}\right)=0,0668 \Leftrightarrow P\left(Z>\dfrac{15}{\sigma}\right)=0,0668 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left(Z<\dfrac{15}{\sigma}\right)=1-0,0668=0,9322 \rightarrow \text{(por la tabla normal)} \Rightarrow \dfrac{15}{\sigma}=1,5 \Rightarrow \sigma=10$$
Por tanto la distribución es *N*(175, 10). Luego:

b) $P(X>165)=P\left(Z>\dfrac{165-175}{10}\right)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0,8413$.
Esta probabilidad equivale al 84,13%.

5. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:
a) (0,5 puntos) No acierte ninguna respuesta correcta.
b) (1 punto) Acierte 6 o más preguntas.
Solución:
Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p=\frac{1}{3}$; la de fallar, $q=\frac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{256}{6561}=0,039$.

b) $P(X\geq 6)=P(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=28\cdot\frac{4}{6561}+8\cdot\frac{2}{6561}+\frac{1}{6561}=\frac{129}{6561}=0,0197 .$$

6. (1,5 puntos) Un examen de respuesta múltiple consta de 80 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte 25 o más preguntas? ¿Y menos de 10?
Solución:
El experimento es de tipo binomial, con P(éxito) = p = 0,25 y q = 0,75. Para n = 80, será B(80, 0,25).
La binomial B(80, 0,25) puede aproximare mediante la normal de media $\mu = 80 \cdot 0,25 = 20$ y $\sigma=\sqrt{80\cdot 0,25\cdot 0,75}=\sqrt{15}=3,87 \rightarrow$ N(20, 3,87).
Con esto, haciendo la corrección de continuidad y tipificando:

$$\rightarrow P(X\geq 25)=P(X'>24,5)=P\left(Z>\frac{24,5-20}{3,87}\right)=P(Z>1,16)=1-P(Z<1,16)=$$

= 1 – 0,8770 = 0,1230.

$$\rightarrow P(X<10)=P(X'<9,5)=P\left(Z<\frac{9,5-20}{3,87}\right)=P(Z<-2,71)=1-P(Z<2,71)=$$

= 1 – 0,9966 = 0,0034.

Alcalá de Henares, 14 de mayo de 2018.