MATEMÁTICAS II BACHILLERATO

EXAMEN FINAL

1. a) Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo cuando $a = 1$. (0,5 puntos)

2. (2 puntos) Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$, $\quad s \equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comprueba que se cortan perpendicularmente y halla su punto de corte. (1,5 puntos)
b) Halla la ecuación general del plano que las contiene. (0,5 puntos)

3. (Madrid, junio 16)
Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:
a) (0,8 puntos) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono *ABCD* es un paralelogramo.
b) (0,5 puntos) Calcular el área de dicho paralelogramo

4. (0,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

5. (0,5 puntos) Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

6. (0,5 puntos) Halla el valor de *a* para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

7. (1,5 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$. (Determina todas sus características).

8. (Aragón, junio 16)
(1 punto) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$.

9. (0,7 puntos) El 10% de las personas tiene miedo a las arañas, el 30% a las ratas y el 8% a las dos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona no tenga miedo a ninguna de las dos?

Alcalá de Henares, 17 de mayo de 2017

EXAMEN FINAL: Recuperación de Análisis, Integrales y Probabilidad

1. (0,7 puntos) Comprueba que la ecuación $e^{-x}+2x-1=0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1]. ¿Qué teorema has utilizado?

2. (0,7 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 0?

3. (0,7 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, *f*(0)).

4. (0,7 puntos) Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

5. (0,7 puntos) Halla el valor de *a* para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en *x* = 2.

6. (1,5 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$. (Determina todas sus características).

7. (Aragón 2012)
(1 punto) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

8. Calcula las siguientes integrales:

a) (0,4 puntos) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$ b) (0,3 puntos) $\displaystyle\int \left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\text{sen } 2x}{5}\right)dx$

c) (0,8 puntos) $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx$ d) (0,5 puntos) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

9. (Aragón, junio 2016)
(1 punto) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$.

10. (1 punto) Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas *A* y *B.* La urna *A* contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna *B* contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna *A*; en caso contrario se extrae una bola de la urna *B*.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna *A*?

Alcalá de Henares, 17 de mayo de 2017

EXAMEN FINAL: Integrales y Probabilidad

1. Calcula las siguientes integrales:

a) (0,6 puntos) $\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$ b) (0,6 puntos) $\int \left(3\cos\frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{5}\right)dx$

c) (1 punto) $\int (x\ln x)\,dx$ d) (0,8 puntos) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

2. (Aragón, junio 2016)

(1,5 puntos) Usando el cambio de variable t = cos (x), calcule: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx$.

3. (Asturias) (1,5 puntos) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) Calcula el área de ese recinto.

4. (Aragón, junio 2016)
(1,5 puntos) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$.

5. (1,5 puntos) Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna *B* contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna *A*; en caso contrario se extrae una bola de la urna *B*.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna *A*?

6. (Comunidad Valenciana, 2013)
(1,5 puntos) El 50% de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40% afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70% de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:
a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes
b) La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B.
c) Si practica en deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
d) ¿Son independientes los sucesos “Practicar el deporte A” y “Practicar el deporte B”? ¿Por qué?

Alcalá de Henares, 17 de mayo de 2017

EXAMEN FINAL: Preguntas para subir nota

1. Madrid, junio 16

a) (1,5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X\left(CD\right)^{-1} = A + X\left(D^{-1}C^{-1} - B\right)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

2. Murcia, junio 16

Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.
a) [1 punto] Calcule el área del triángulo PQR.
b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o ímplícita) del plano que contiene al triángulo PQR.
c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.

3. (Propuesto en Selectividad)

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$, determinando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

4. Comunidad Valenciana, junio 16

Se da la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Dominio y asíntotas de la función f. (2 *puntos*)
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (3 *puntos*)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 *puntos*)
d) El valor de $a > 4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ *y* $x = a$ es ln(3/2). (2 *puntos*)

Alcalá de Henares, 17 de mayo de 2017

SOLUCIONES
EXAMEN FINAL

1. a) Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo cuando a = 1. (0,5 puntos)

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow \text{(Se hacen transformaciones de Gauss)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} A= \\ F2+F1 \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & a^3-a & a-1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-az=0 \\ (a+1)y=2a+1 \\ (a^3-a)z=a-1 \end{cases}$$

→ Cálculo de los rangos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-a \end{vmatrix}=(a+1)(a^3-a)=a(a+1)^2(a-1)$$

Este determinante vale 0 si a = 0, a = –1 o a = 1.

Con esto:

- Si $a \neq 0$, –1 y 1 ⇒ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si a = 0, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=M$

Es obvio que el rango de A vale 2, mientras que el de M es 3, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Por tanto, en este caso, el sistema es incompatible.

- Si a = –1, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)=M$

Como A tiene dos filas nulas, su rango es 1, r(A) = 1, mientras que r(M) = 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$. El sistema vuelve a ser incompatible.

- Si a = 1:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$$

Como ambos rangos son iguales, r(A) = 2 = r(M), el sistema será compatible indeterminado.

b) Para a = 1, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y \quad =3 \\ 0z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}+t \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}$$

2. (2 puntos) Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$, $s \equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comprueba que se cortan perpendicularmente y halla su punto de corte. (1,5 puntos)
b) Halla la ecuación general del plano que las contiene. (0,5 puntos)

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

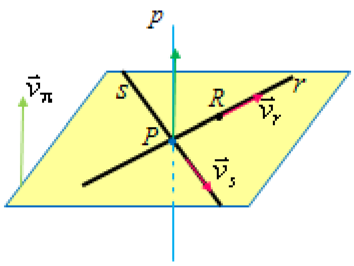
$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=7-2y \\ y=y \\ z=2-y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=7-4t \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, 2, -1)$$

$$s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+h \\ y=3h \\ z=-1+2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3, 2)$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son perpendiculares, ya que

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-4, 2, -1) \cdot (1, 3, 2) = -4 + 6 - 2 = 0.$$

Por tanto, las rectas son perpendiculares.



Para comprobar que se cortan basta con ver que el sistema que determinan tiene solución. Este sistema es:

$$\begin{cases} 7-4t=1+h \\ 2t=3h \\ 2-t=-1+2h \end{cases}, \text{ cuya solución es } t=\frac{9}{7} \text{ y } h=\frac{6}{7}$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo $t=\dfrac{9}{7}$ en r o $h=\dfrac{6}{7}$ en $s \to P\left(\dfrac{13}{7}, \dfrac{18}{7}, \dfrac{5}{7}\right)$.

b) El plano pedido queda determinado, por ejemplo, por $R(1, 0, -1) \in r$ y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.
Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -4 & 1 \\ y & 2 & 3 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi\!: \; 7(x-1)+7y-14(z+1)=0 \Rightarrow \pi\!: \; x+y-2z-3=0.$$

3. Madrid, junio 16

Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) (0,8 puntos) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono *ABCD* es un paralelogramo.

b) (0,5 puntos) Calcular el área de dicho paralelogramo.

Solución:

a) Los puntos son coplanarios si los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son linealmente dependientes.

AB = (0, 6, 4) – (0, 5, 3) = (0, 1, 1); ***AC*** = (2, 4, 2) – (0, 5, 3) = (2, –1, –1);

AD = (2, 3, 1) – (0, 5, 3) = (2, –2, –2)

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, se deduce que son coplanarios.

El polígono *ABCD* será un paralelogramo cuando los vectores ***AB*** y ***DC*** sean iguales; y lo mismo para los vectores y ***BC*** y ***AD***.

AB = (0, 1, 1); ***DC*** = (2, 4, 2) – (2, 3, 1) = (0, 1, 1) → son iguales.

AD = (2, –2, –2); ***BC*** = (2, 4, 2) – (0, 6, 4) = (2, –2, –2) → son iguales.

b) El área del paralelogramo viene dada por $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (0,\ 2,\ -2) \Rightarrow S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}\ \text{u}^2.$$

4. (0,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a a para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

Solución:

Los límites laterales coinciden con $f(0) = 1$, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{ax} = e^{0^-} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

Salvo en $x = 0$, su derivada es $f´(x) = \begin{cases} ae^{ax}, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Las derivadas laterales en $x = 0$ valen:

$f´(0^-) = a$ y $f´(0^+) = 2 \Rightarrow$ La función es derivable si $a = 2$.

5. (0,5 puntos) Calcula el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

6. (0,5 puntos) Halla el valor de a para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

Solución:
Se deriva dos veces:

$$f(x)=ax^2+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=2ax-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=2a+\frac{2}{x^3}$$

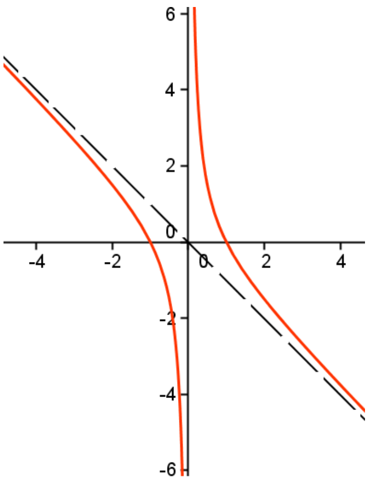
Para que se tenga un punto de inflexión en $x = 2$ debe cumplirse que $f''(2)=2a+\dfrac{1}{4}=0 \Rightarrow$ $a=-\dfrac{1}{8}$.

La función será $f(x)=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{x}$.

7. (1,5 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$. (Determina todas sus características).

Solución:
– Dominio = **R** – {0}. Es evidente que en $x = 0$ tiene una asíntota vertical.
– La función es impar: $f(–x) = –f(x)$.
– Como $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$, la recta $y=-x$ es una asíntota oblicua. También puede verse que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=n$$



Derivadas:

$f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{x^2}<0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f''<0$ si $x < 0$: cóncava (∩);

$f''>0$ si $x > 0$: convexa (∪).

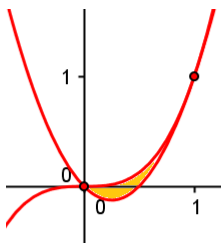
Algunos valores:
(–1, 0); (1, 0); (–2, 3/2); (2, –3/2); (–3, 8/3); (3, –8/3)

8. Aragón, junio 2016
(1 punto) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$.
Solución:
Las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$ se cortan cuando

$$x^3=2x^2-x \Rightarrow x^3-2x^2+x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x+1\right)=0 \Rightarrow x\left(x-1\right)^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1.$$

Por tanto, el área encerrada entre ellas viene dada por:

$$\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}\ \text{u}^2.$$



La situación gráfica (que en este caso no se pide) es la representada en la figura

9. (0,7 puntos) El 10% de las personas tiene miedo a las arañas, el 30% a las ratas y el 8% a las dos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona no tenga miedo a ninguna de las dos?
Solución:
Si se llama *A* al suceso tener miedo a las arañas y *R*, tener miedo a las ratas, se sabe:

$P(A) = 0,10$; $P(R) = 0,30$; $P(A \cap R) = 0,08$.

El suceso $A \cup B$ indica tener miedo a alguno de esos dos bichos. Su probabilidad es:

$P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R)$ = 0,10 + 0,30 – 0,08 = 0,32

La probabilidad de no tener miedo a ninguno de los dos es:

$P\left(\overline{A \cup R}\right) = 1 - P(A \cup R) = 1 - 0,32 = 0,68$

EXAMEN FINAL: Recuperación de Análisis, Integrales y Probabilidad

- Algunas de las preguntas de este examen son comunes a las del EXAMEN FINAL anterior, aunque con distinta numeración y puntuación. Aquí se da la solución de las demás.

1. (0,7 puntos) Comprueba que la ecuación $e^{-x} + 2x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1]. ¿Qué teorema has utilizado?
Solución:
La función $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$ es continua y, además, cumple que:

$f(-2) = e^2 - 5$ = 2,389… > 0 y $f(-1) = e - 3$ = –0,28… < 0

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$. Este valor *c* es la raíz de $e^{-x} + 2x - 1 = 0$ en el intervalo [–2, –1].

3. (0,7 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ en el punto (0, *f*(0)).
Solución:
La ecuación de la recta pedida es: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f(0) = 0;\ f'(0) = 2.$$

La recta tangente será: $y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$.

7. (Aragón 2012)
(1 punto) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.
Solución:
Sean *x* e *y* los números buscados.
Se desea que el producto $P = x \cdot y^2$ sea máximo.
Como se cumple que $x + y = 12 \Rightarrow x = 12 - y$.
Sustituyendo en *P* se tiene: $P = (12 - y) \cdot y^2$; que es una función en *y*:

$P(y) = 12y^2 - y^3$.

El máximo de *P* se obtiene en las soluciones de $P'(y) = 0$ que hagan negativa a $P''(y)$.
Derivando dos veces:

$P'(y) = 24y - 3y^2$; $P''(y) = 24 - 6y$

La derivada primera se anula cuando $y = 0$ o $y = 8$.
Como $P''(0) = 24 > 0$ y $P''(8) = -24 < 0$, el valor máximo del producto se alcanza cuando $y = 8$.

Los números pedidos son $x = 4$ e $y = 8$.

8. Calcula las siguientes integrales:

a) (0,4 puntos) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$ b) (0,3 puntos) $\displaystyle\int\left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\text{sen }2x}{5}\right)dx$

c) (0,8 puntos) $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx$ d) (0,5 puntos) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

<u>Solución</u>:
a) Si se opera resulta casi inmediata. Bastaría con ajustar constantes.

$$\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx = \int \frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-4x^{1/2}+3x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}-4\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+3\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}+c = \frac{8}{15}x^{5/2}-\frac{8}{3}x^{3/2}+6\cdot x^{1/2}+c$$

b) $\displaystyle\int\left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\text{sen }2x}{5}\right)dx = 6\int\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx-\frac{1}{10}\int 2\sin 2x dx = 6\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x+c$

c) $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx$.

Tomando: $u = x\ln x \Rightarrow du = (\ln x+1)\,dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego, $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx = x^2\ln x-\int (x\ln x+x)\,dx = x^2\ln x-\int (x\ln x)\,dx+\int xdx$

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2\int (x\ln x)\,dx = x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+c$$

De donde, $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+c$.

→ Resulta más sencilla si se toman las partes: $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Luego, $\displaystyle\int (x\ln x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^4}{4}+c$

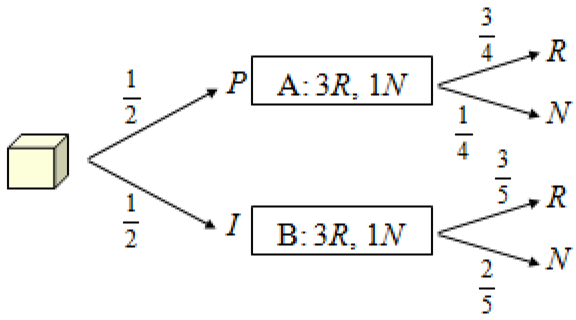
d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$ puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -1;\ B = 1.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = -\ln(x-2)+\ln(x-3)+c = \ln\frac{x-3}{x-2}+c.$$

10. (1 punto) Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna *B* contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna *A*; en caso contrario se extrae una bola de la urna *B*.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna *A*?
Solución:
El diagrama de árbol que explica el experimento es el siguiente.



a) La probabilidad de extraer bola roja es:

$$P(R) = P(P)\cdot P(R/A) + P(I)\cdot P(R/B) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{27}{40}$$

b) Por Bayes:

$$P(A/R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{27}{40}} = \frac{5}{9}$$

EXAMEN FINAL: Integrales y Probabilidad

- Algunas de las preguntas de este examen son comunes a las propuestas en los exámenes anteriores, aunque con distinta numeración y puntuación. Aquí se da la solución de las demás.

2. (Aragón, junio 2016)

(1,5 puntos) Usando el cambio de variable *t* = cos (*x*), calcule: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx$

Solución:
b) Si $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.
Por tanto:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx = \int \frac{\cos x(\sin x dx)}{1-\cos x} = \int \frac{t(-dt)}{1-t} = \int\left(1-\frac{1}{1-t}\right)dt = t + \ln(1-t).$$

Deshaciendo el cambio queda:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx = \cos x + \ln(1-\cos x)$$

Luego:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx = \left(\cos x + \ln(1-\cos x)\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

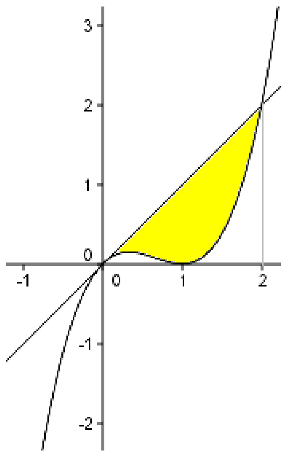
$$= \cos\frac{\pi}{3} + \ln\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4} + \ln\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$ → Se han agrupado los ln y se ha racionalizado.

3. (Asturias) (1,5 puntos) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) Calcula el área de ese recinto.
Solución:
a) $y = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \to y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
Tangente en (0, 0): $y = x$.

b) La derivada se anula, $3x^2 - 4x + 1 = 0$, cuando $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases}$.

Como $y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''(1/3) < 0$; $y''(1) > 0$. Luego, en x = 1/3 se tiene un máximo y en x = 1, un mínimo.
La recta tangente corta a la curva cuando $x^3 - 2x^2 + x = x \Rightarrow$
x = 0 y x = 2.
Algunos puntos de la gráfica de la curva son:
(–1, –4); (0, 0); (1/3, 4/27), máximo; (1, 0), mínimo; (2, 2).



c) El recinto comprendido entre la recta y la curva es el sombreado en la figura adjunta. Como en el intervalo [0, 2] la recta va por encima de la curva, el área pedida viene determinada por la integral

$$A = \int_0^2 \left(x - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right) dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

6. (Comunidad Valenciana, 2013)
(1,5 puntos) El 50% de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40% afirma practicar el deporte B. Además, se sabe que el 70% de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B. Si seleccionamos un joven al azar, se pide:
a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes
b) La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el deporte B.
c) Si practica en deporte B, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A?
d) ¿Son independientes los sucesos “Practicar el deporte A” y “Practicar el deporte B”? ¿Por qué?
Solución:
Sean los sucesos:
A = “Practicar el deporte A”, B = “Practicar el deporte B”
Se sabe que:
$P(A) = 0,50$; $P(B) = 0,40$; $P(A \cup B) = 0,70$

a) No practicar ningún deporte es el suceso contrario de $A \cup B$. Su probabilidad es:

$$P\left[\left(A \cup B\right)^C\right] = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0,70 = 0,30$$

b) El suceso “practique el deporte A y no practique el deporte B” = $A - B$.
Su probabilidad es:

$$P\left(A - B\right) = P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right) = 0,50 - 0,20 = 0,30$$

La $P(A\cap B)$ se obtiene despejando el la igualdad:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0,70=0,50+0,40-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0,20$$

c) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,4}=\dfrac{1}{2}$.

d) Son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Como $P(A)\cdot P(B)$ = 0,50 · 0,40 = 0,20 y $P(A\cap B)$ = 0,20, los sucesos *A* y *B* son independientes.

Preguntas para subir nota

1. Madrid, junio 16

a) (1,5 puntos) Despeje *X* en la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)$, siendo *A*, *B*, *C*, *D* matrices cuadradas invertibles. Exprese *X* de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ determine la matriz *Y* tal que $YB=A$.

Solución:

a) $X(CD)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)$ → teniendo en cuenta que $(CD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}$, se tiene:

$$X(CD)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}\right)-XB\ \Rightarrow\ X(CD)^{-1}=A+X(CD)^{-1}-XB\ \Rightarrow\ O=A-XB\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ XB=A\Rightarrow X=AB^{-1}$. (Se ha multiplicado por B^{-1} por la derecha).

b) $YB=A\ \Rightarrow\ Y=AB^{-1}$.

La inversa de *B* es $B^{-1}=\dfrac{(Adj(B))^t}{|B|}$, siendo $Adj(B)$ la matriz de los adjuntos de *B*.

Dicha inversa existe si $|B|\neq 0$. En efecto: $|B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1+2+1=2$.

La matriz de los adjuntos es: $(B_{ij})=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Con esto:

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Murcia, junio 16

Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.
a) [1 punto] Calcule el área del triángulo *PQR*.
b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o ímplícita) del plano que contiene al triángulo *PQR*.
c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por *P*, está contenida en el plano que contiene al triángulo *PQR* y es perpendicular al lado *QR*.

Solución:

a) El área del triángulo de vértices *P*, *Q* y *R* viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$

En este caso:

$\mathbf{PQ} = (1, 2, 5) - (2, 7, 3) = (-1, -5, 2)$; $\mathbf{PR} = (-1, -2, 5) - (2, 7, 3) = (-3, -9, 2)$

Como:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -5 & 2 \\ -3 & -9 & 2 \end{vmatrix} = (8, \ -4, \ -6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{64+16+36} = \sqrt{116}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \frac{\sqrt{116}}{2} = \sqrt{29}$ u^2.

b) El plano viene determinado por el punto *P* y por los vectores **PQ** y **PR**. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -3 \\ y-7 & -5 & -9 \\ z-3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(x-2) - 4(y-7) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow$$

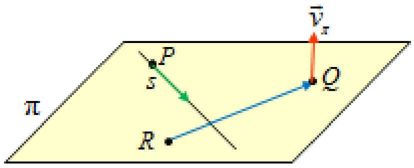
$$\Rightarrow \pi\text{: } 8x - 4y - 6z + 30 = 0 \Rightarrow \pi\text{: } 4x - 2y - 3z + 15 = 0.$$

c) El vector de dirección de la recta pedida, $\vec{v}_s$, debe ser perpendicular a $\vec{v}_\pi = (4, -2, -3)$ y al vector $\mathbf{QR} = (-1, -2, 5) - (1, 2, 5) = (-2, -4, 0)$.

Por tanto, $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-12, \ 6, \ -20)$.

Su ecuación será:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 12t \\ y = 7 + 6t \\ z = 3 - 20t \end{cases}.$$



3. (Propuesto en Selectividad)

Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\frac{|x|}{2-x}$, determinando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

La función puede definirse a trozos como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{2-x}, & x<0\\ \frac{x}{2-x}, & x\geq 0-\{2\}\end{cases}$$

Por tanto, Dom(*f*) = **R** – {2}.

En el punto $x = 2$ la curva tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{2-x}=\infty$.

Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$.

Cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$.

Por otra parte, las rectas $y = 1$ e $y = -1$ son asíntotas horizontales de la función. La primera, $y = 1$, hacia $-\infty$; la segunda, $y = -1$, hacia $+\infty$.

En efecto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2-x}=1 \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-x}=-1$$

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 1^-$ (la curva va por debajo de la asíntota.)

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to -1^-$ (la curva va por debajo de la asíntota.)

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{(2-x)^2}, & x<0\\ \frac{2}{(2-x)^2}, & x>0-\{2\}\end{cases}$$

Como puede verse fácilmente, la función tampoco es derivable en $x = 0$, pues por la izquierda su derivada es negativa (tiende a –1/2) y por la derecha es positiva (tiende a 1/2).

También es inmediato ver que:

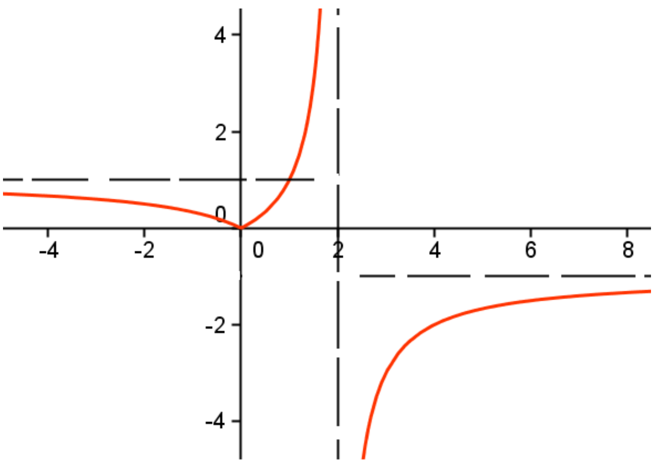
- si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;
- si $x > 0 - \{2\}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Con la información obtenida y dando algunos valores podemos dibujar la gráfica.

Valores:

(–2, 1/2); (–1, 1/3); (0, 0); (1, 1); (1,5, 3); (2,5, –5); (3, –3); (4, –2); (6, –3/2)

La gráfica pedida es la adjunta.



4. Comunidad Valenciana, junio 16

Se da la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Dominio y asíntotas de la función *f*. (2 *puntos*)
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*. (3 *puntos*)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 *puntos*)
d) El valor de $a > 4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ *y* $x = a$ es ln(3/2). (2 *puntos*)

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ no está definida en los valores anulan al denominador:

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$.

En esos puntos tiene asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-5x+6}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty \text{ y } \lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-5x+6}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación $x = 2$ y $x = 3$.

También tiene una asíntota horizontal ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Derivando: $f´(x)=\dfrac{-2x+5}{\left(x^2-5x+6\right)^2} \to$ Se anula en $x=\dfrac{5}{2}$.

Si $x<2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $2<x<\dfrac{5}{2}$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $\dfrac{5}{2}<x<3$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. En $x=\dfrac{5}{2}$ la función tendrá un máximo.

Si $x>3$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

c) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx$ puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-1;\ B=1.$$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-\ln(x-2)+\ln(x-3)+c=\ln\frac{x-3}{x-2}+c.$$

d) Para $x > 4$ la función es positiva; por tanto el área pedida es:

$$\int_4^a\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\left[\ln\frac{x-3}{x-2}\right]_4^a=\ln\frac{a-3}{a-2}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2(a-3)}{a-2}.$$

Si se quiere que su valor sea $\ln\dfrac{3}{2}$, se tendrá que.

$$\ln\frac{2(a-3)}{a-2}=\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2(a-3)}{a-2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4a-12=3a-6\Rightarrow a=6.$$