EXAMEN DE MATEMÁTICAS II BACHILLERATO
(Examen Final, Recuperación de Análisis e Integrales)

EXAMEN FINAL

1. (RMJ15)
a) (1,5 puntos) Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Si es posible, resuélvelo para el valor de *a* = −2.

2. (3 puntos: 0,75 puntos cada apartado)
a) Halla la recta *r* que pasa por el punto *P*(1, −1, −2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+2y+3z+6=0$.
b) Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por los puntos *A*(1, 0, 0) y *B*(−1, −3, −4).
c) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) Calcula la distancia del punto *A*(1, 0, 0) al plano π´ que pasa por el punto *P*(1, −1, −2) y es paralelo a π.

3. (1 punto) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

4. (1 punto) Halla el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$.

5. (1,5 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^4+1}{2x^3}$.
(Determina: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad).

6. (1 punto) Calcula la integral $\int_1^e \ln(x^2)dx$.

Alcalá de Henares. Mayo de 2016.

EXAMEN DE ANÁLISIS (DERIVADAS E INTEGRALES)

Recuperación del Bloque de Análisis

7. (1 punto) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

8. Halla los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$ b) (1 punto) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 2\sin x\right)^{1/2x}$

9. (2 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^4+1}{2x^3}$.

(Determina: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad).

10. (CBS14) (1,5 puntos) Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 euros el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 euros el metro. Halla el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 euros.

11. Calcula:

a) (0,7 puntos) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx$ b) (0,8 puntos) $\int_1^e \ln(x^2)dx$

12. (Propuesto en Selectividad, Extremadura)

a) (0,5 puntos) Calcula los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.

b) (0,5 puntos) Dibuja el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

c) (1 punto) Calcula el área de dicho recinto.

Alumnos con el <u>cálculo de derivadas</u> aprobado.

13. Calcula las siguientes integrales:

a) (0,5 puntos) $\int x(4-4x^2)dx$ b) (0,6 puntos) $\int \cos(3x-2)dx$

c) (0,7 puntos) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx$ d) (1,2 puntos) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^2+1}dx$

14. (1,5 puntos) Sea $I = \int \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx$.

a) Expresa I aplicando el cambio de variable $x = t^2$.

b) Calcular el valor de I.

15. Calcula:

a) (1 punto) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx$ b) (1,5 puntos) $\int_1^e \ln(x^2)dx$

16. Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

a) (0,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) (1 punto) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) (1,5 puntos) Calcula el área de ese recinto.

Alcalá de Henares. Mayo de 2016.

SOLUCIONES

1. (RMJ15)

a) (1,5 puntos) Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Si es posible, resuélvelo para el valor de $a=-2$.

<u>Solución</u>:

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de *A* sea menor que el rango de *M*.

Las matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$

Como la columna de los términos independientes es igual a la de los coeficientes de la incógnita *y*, el sistema siempre será compatible, pues el rango de *M* no puede ser mayor que el de *A*.

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^3+3a-2=-(a-1)^2\cdot(a+2)$

Este determinante vale 0 si $a=1$ o $a=-2$.

Con esto:

- Si $a\neq 1$ y -2 $\Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $a=1$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$ $\Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 1. El sistema será compatible indeterminado con dos grados de indeterminación.
- Si $a=-2$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$ $\Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

b) En este caso, $a=-2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1+2z \\ x-2y=-2-z \end{cases} \Rightarrow \underset{E2-E1}{} \begin{cases} x+y=1+2z \\ -3y=-3-3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1+2z \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

2. (3 puntos: 0,75 puntos cada apartado)
a) Halla la recta *r* que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$.
b) Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por los puntos *A*(1, 0, 0) y *B*(–1, –3, –4).
c) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) Calcula la distancia del punto *A*(1, 0, 0) al plano π´ que pasa por el punto *P*(1, –1, –2) y es paralelo a π.

Solución:

a) La recta *r* queda definida por *P*(1, –1, –2) y el vector $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, 3), normal al plano π.

Su ecuación es: $r:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

b) La recta *s* está determinada por el punto *A*(1, 0, 0) y por el vector ***AB*** = (–1, –3, –4) – (1, 0, 0) = (–2, –3, –4).

Su ecuación es: $s:\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = \ \ -3h \\ z = \ \ -4h \end{cases}$.

c) Para determinar la posición relativa de ambas rectas hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r$ = (1, 2, 3), $\vec{v}_s$ = (–2, –3, –4) y ***AP*** = (1, –1, –2) – (1, 0, 0) = (0, –1, –2).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2\cdot(-1) = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes; lo que indica que las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema: $r:\left\{\begin{matrix} x = 1 + t & & x = 1 - 2h \\ y = -1 + 2t & \equiv & y = -3h \\ z = -2 + 3t & & z = -4h \end{matrix}\right\}: s$.

$\begin{cases} 1 + t = 1 - 2h \\ -1 + 2t = -3h \\ -2 + 3t = -4h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ h = -1 \end{cases}$ → Punto de corte: *C*(3, 3, 4).

d) El plano π´ está determinado por el vector normal a él, que es $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, 3), y por el punto *P*(1, –1, –2).
Su ecuación es: $\pi' \equiv (x - 1) + 2(y + 1) + 3(z + 2) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0$.
La distancia de *A* a π´ es:

$$d(A, \pi') = \left| \frac{1 + 7}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

3. Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

Solución:

La parábola debe pasar por el punto (1, 1) $\Rightarrow 1 = 1 + b + c \Rightarrow c = -b$.

La derivada en el punto de abscisa $x = 1$ debe valer 1, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

Como $y' = 2x + b \Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \to c = 1$.

La parábola buscada es $y = x^2 - x + 1$.

4. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{2\sin x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{2\cos x \cos x - 2\sin x \sin x} = \frac{2}{2} = 1.$$

5. (1,5 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{2x^3}$

(Determina: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad).

Solución:

Dom(f) = $\mathbf{R} - \{0\}$.

Asíntotas.

Dividiendo: $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{2x^3} = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2x^3}$.

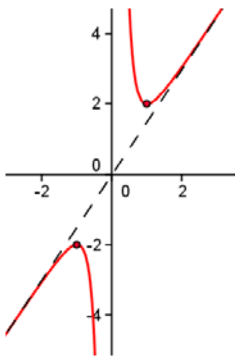
La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4 + 1}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2x^3}\right) = \infty$.

También tiene la recta $y = \dfrac{3}{2}x$ como asíntota oblicua, pues la diferencia $f(x) - \dfrac{3}{2}x$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Esto es: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4 + 1}{2x^3} - \dfrac{3}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2x^3}\right) = 0$.

Crecimiento.

Derivando:

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{2x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{12x^3 \cdot 2x^3 - \left(3x^4 + 1\right) \cdot 6x^2}{4x^6} = \frac{6x^4 - 6}{4x^4}.$$



La derivada se anula si $6x^4 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

- Si $x < -1$ o $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x \in (-1, 1) - \{0\}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Como $f''(x) = \dfrac{6 \cdot 16\, x^3}{16x^8} = \dfrac{6}{x^5} \Rightarrow f''(1) = 12 > 0$; $f''(-1) = -12 < 0$.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un mínimo; en $x = -1$, un máximo;

- Si $x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava ($\cap$).
- Si $x > 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa ($\cup$).

Su gráfica es la adjunta.

6. (1 punto) Calcula la integral $\int_1^e \ln(x^2)dx$.

Solución:

Aplicando una de las propiedades de los logaritmos $\int_1^e \ln(x^2)dx = \int_1^e 2\ln(x)dx$.

Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2\left(x\ln x - x\right)$$

Por tanto:

$$\int_1^e 2\ln x dx = 2\left[x\ln x - x\right]_1^e = 2\left[e\ln e - e - (1\ln 1 - 1)\right] = 2.$$

EXAMEN DE ANÁLISIS (DERIVADAS E INTEGRALES)

7. (1 punto) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

Solución:

La parábola debe pasar por el punto (1, 1) $\Rightarrow 1 = 1 + b + c \Rightarrow c = -b$.

La derivada en el punto de abscisa $x = 1$ debe valer 1, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

Como $y' = 2x + b \Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \to c = 1$.

La parábola buscada es $y = x^2 - x + 1$.

8. Halla los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$ b) (1 punto) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 2\sin x\right)^{1/2x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \sin x}{2\sin x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \cos x}{2\cos x\cos x - 2\sin x\sin x} = \frac{2}{2} = 1.$$

b) Es una forma indeterminada: $\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 2\sin x\right)^{1/2x} = [1^\infty]$.

Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{1/2x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x - 2\sin x)^{1/2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(\cos x - 2\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x - 2\sin x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x - 2\cos x}{\cos x - 2\sin x}}{2} = -1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 2\sin x\right)^{1/2x} = e^{-1}.$$

9. (2 puntos) Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{2x^3}$.

(Determina: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad).

Solución:

Dom(f) = **R** – {0}.

Asíntotas.

Dividiendo: $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{2x^3}=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2x^3}$.

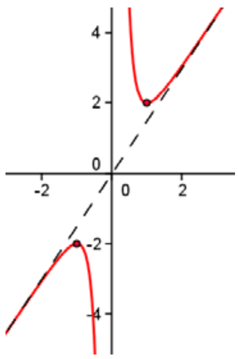
La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+1}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2x^3}\right)=\infty$.

También tiene la recta $y=\dfrac{3}{2}x$ como asíntota oblicua, pues la diferencia $f(x)-\dfrac{3}{2}x$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Esto es: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4+1}{2x^3}-\dfrac{3}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2x^3}\right)=0$.

Crecimiento.

Derivando:

$$f(x)=\frac{3x^4+1}{2x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{12x^3\cdot 2x^3-\left(3x^4+1\right)\cdot 6x^2}{4x^6}=\frac{6x^4-6}{4x^4}.$$



La derivada se anula si $6x^4-6=0\Rightarrow x=\pm 1$.

- Si $x < -1$ o $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x \in (-1, 1) - \{0\}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Como $f''(x)=\dfrac{6\cdot 16x^3}{16x^8}=\dfrac{6}{x^5}\Rightarrow f''(1)=12>0$; $f''(-1)=-12<0$.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un mínimo; en $x = -1$, un máximo;

- Si $x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava ($\cap$).
- Si $x > 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa ($\cup$).

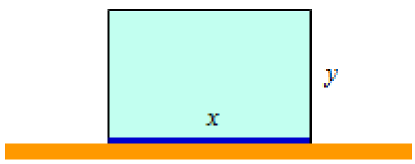
Su gráfica es la adjunta.

c) Su gráfica es la adjunta.

10. (1,5 puntos) (CBS14) Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 euros el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 euros el metro. Halla el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 euros.

Solución:

La situación de la finca es como la que se muestra en la figura adjunta.



Si las medidas de los lados son x e y, se sabe que

$$125x+2\cdot 25y+25x=3000\Rightarrow 150x+50y=3000$$

O lo que es lo mismo:

$$3x+y=60\Rightarrow y=60-3x$$

Se desea que la superficie, $S=xy$, del terreno sea máxima.

Sustituyendo:

$$S=x\cdot\left(60-3x\right)=60x-3x^2$$

Derivando: $S'=60-6x$, que se anula cuando $x = 10$.

Como $S''=-6<0$, se deduce que la solución hallada es máxima.

Por tanto, las dimensiones de la finca deben ser de 10 m por 30 m. El lado del camino debe ser el de 10 metros.

11. Calcula:

a) (0,7 puntos) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx$ b) (0,8 puntos) $\int_1^e \ln(x^2)dx$

Solución:

a) El denominador: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{3x-2}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$3x-2=A(x+3)+B(x-2)$$

$\to$ si $x = 2$: $4 = 5A$ $\Rightarrow A = 4/5$

$\to$ si $x = -3$: $-11 = -5B$ $\Rightarrow B = 11/5$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx = \int\left(\frac{4/5}{x-2}+\frac{11/5}{x+3}\right)dx=\frac{4}{5}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{11}{5}\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$=\frac{4}{5}\ln(x-2)+\frac{11}{5}\ln(x+3)+c$$

b) Aplicando una de las propiedades de los logaritmos $\int_1^e \ln(x^2)dx = \int_1^e 2\ln(x)dx$.

Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$2\int \ln x dx=2\left(x\ln x-\int dx\right)=2(x\ln x-x)$$

Por tanto:

$$\int_1^e 2\ln x dx=2\left[x\ln x-x\right]_1^e=2\left[e\ln e-e-(1\ln 1-1)\right]=2.$$

12. (Propuesto en Selectividad, Extremadura)

a) (0,5 puntos) Calcula los puntos de corte de la recta $2y-x=3$ y de la recta $y=1$ con la rama hiperbólica $xy=2$, $x > 0$.

b) (0,5 puntos) Dibuja el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

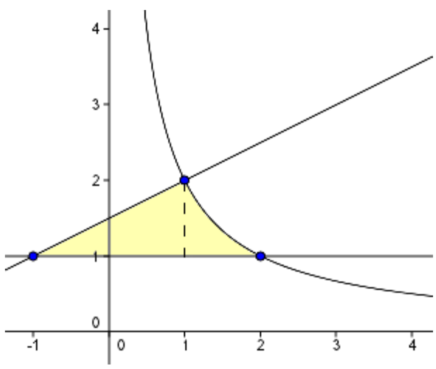
c) (1 punto) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a) Los puntos de corte de la curva con cada una de las rectas se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases}2y-x=3\\ y=1\end{cases}\to(-1,\ 1);\quad \begin{cases}2y-x=3\\ xy=2\end{cases}\to(1,\ 2);$$

$$\begin{cases}xy=2\\ y=1\end{cases}\to(2,\ 1)$$



b) Su gráfica es la adjunta. Para representar cada curva basta con dar algunos valores.

c) El recinto sombreado puede descomponerse en dos partes: el triángulo rectángulo de la izquierda, cuya área vale 1 u^2; y el “triángulo” curvilíneo de la derecha, cuya área se calcula por la integral definida

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) dx = \left[2\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - (2\ln 1 - 1) = 2\ln 2 - 1 \text{ u}^2.$$

Por tanto, el área total del recinto vale $2\ln 2$ u^2.

ANÁLISIS: INTEGRALES

13. Calcula las siguientes integrales:

b) (0,5 puntos) $\int x(4-4x^2)dx$ b) (0,6 puntos) $\int \cos(3x-2)dx$

c) (0,7 puntos) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx$ d) (1,2 puntos) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^2+1}dx$

Solución:

Todas son inmediatas.

a) $\int x(4-4x^2)dx = \int (4x-4x^3)dx = 2x^2 - x^4 + c$.

b) $\int \cos(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-2)+c$

c) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 (-6)xe^{-3x^2+1}dx = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}e^{-2} - \left(-\frac{1}{6}e^{1}\right) = \frac{1}{6}\left(e-e^{-2}\right)$

d) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1+2x-3}{x^2+1}dx = \int \left(1+\frac{2x-3}{x^2+1}\right)dx = x + \int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{3}{x^2+1}dx =$

$= x + \ln\left(x^2+1\right) - 3\arctan x + c$.

14. (1,5 puntos) Sea $I = \int \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx$.

a) Expresa *I* aplicando el cambio de variable $x = t^2$.

b) Calcular el valor de *I*.

Solución:

$x = t^2 \Rightarrow \sqrt{x} = t$; $dx = 2tdt$.

Sustituyendo en el integrando:

$$I = \int \frac{4t}{3+t}\cdot 2tdt = \int \frac{4t}{3+t}dt = \int \frac{4(3+t)-12}{3+t}dt = \int \left(4 - \frac{12}{3+t}\right)dt =$$

$$= 4t - 12\ln(3+t) + c = 4\sqrt{x} - 12\ln\left(3+\sqrt{x}\right) + c$$

15. Calcula:

a) (1 punto) $\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx$ b) (1,5 puntos) $\int_1^e \ln(x^2)dx$

Solución:

a) El denominador: $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{3x-2}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$3x-2=A(x+3)+B(x-2)$$

$\to$ si $x = 2$: $4 = 5A$ $\Rightarrow A = 4/5$

$\to$ si $x = –3$: $–11 = –5B$ $\Rightarrow B = 11/5$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x-6}dx = \int\left(\frac{4/5}{x-2}+\frac{11/5}{x+3}\right)dx=\frac{4}{5}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{11}{5}\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$=\frac{4}{5}\ln\left(x-2\right)+\frac{11}{5}\ln\left(x+3\right)+c$$

b) Aplicando una de las propiedades de los logaritmos $\int_1^e \ln(x^2)dx = \int_1^e 2\ln(x)dx$.

Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$2\int \ln x dx=2\left(x\ln x-\int dx\right)=2\left(x\ln x-x\right)$$

Por tanto:

$$\int_1^e 2\ln x dx=2\left[x\ln x-x\right]_1^e=2\left[e\ln e-e-(1\ln 1-1)\right]=2.$$

16. Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

a) (0,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) (1 punto) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) (1,5 puntos) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \to y(0)=0$; $y'(0)=1$.

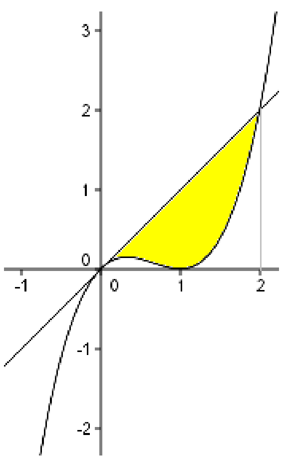
Tangente en (0, 0): $y = x$.

b) La derivada se anula, $3x^2-4x+1=0$, cuando $x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\begin{cases}1/3\\ 1\end{cases}$.

Como $y''=6x-4 \Rightarrow y''(1/3)<0$; $y''(1)>0$. Luego, en $x = 1/3$ se tiene un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

La recta tangente corta a la curva cuando $x^3-2x^2+x=x \Rightarrow$ $x = 0$ y $x = 2$.

Algunos puntos de la gráfica de la curva son:
(–1, –4); (0, 0); (1/3, 4/27), máximo; (1, 0), mínimo; (2, 2).



c) El recinto comprendido entre la recta y la curva es el sombreado en la figura adjunta. Como en el intervalo [0, 2] la recta va por encima de la curva, el área pedida viene determinada por la integral

$$A=\int_0^2\left(x-\left(x^3-2x^2+x\right)\right)dx=\int_0^2\left(-x^3+2x^2\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=-4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\text{ u}^2.$$

Alcalá de Henares. Mayo de 2016. JoséMMM