DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Examen de Análisis Matemático (Grado ENI) — Temas 1 a 5

NOMBRE: **DNI:**

Advertencia: Póngase el nombre en esta hoja y en la primera del cuadernillo en blanco.

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (48 %)

Las respuestas deben justificarse. Cada respuesta correcta vale 0,6 puntos; si es incorrecta puede restar 0,2 puntos.

1. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$ es:

a) 3, si $a = 1$. b) 3, si $a \neq -2$.
c) 2, para cualquier valor de a.

2. El sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases}$ tiene:

a) Una solución única.
b) Infinitas soluciones.
c) Ninguna de las anteriores.

3. Para que la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tenga inversa es necesario que:

a) $a > b$. b) $a = b$. c) $a \neq b$.

4. Los vectores $\vec{u}=(1,a,a)$, $\vec{v}=(0,0,1)$ y $\vec{w}=(0,\ 1,\ a)$ son perpendiculares dos a dos:

a) Solamente cuando $a = 0$.
b) Cuando $a = 0$ o $a = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

5. Los vectores $\vec{u}=(a,a,0)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(0,\ b,\ a)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$:

a) Cuando $a = 0$ y b cualquiera.
b) Cuando $a \neq 0$ y b cualquier valor.
c) Ninguna de las anteriores.

6. Si B es una matriz cuadrada de tamaño 3 × 3 que verifica que $B^2 = 4I$, siendo I la matriz unidad, entonces:

a) El determinante de B vale ±8.
b) El determinante de B vale ±2.
c) Ninguna de las anteriores.

7. La derivada de $f(x)=\dfrac{2}{x^2-3x}$ toma valores positivos:

a) Siempre, para todo x de su dominio.
b) Cuando $x > 3$.
c) Ninguna de las anteriores.

8. La función definida como $f(x)=e^x(x-2)$.

a) Tiene un mínimo en $x = 2$.
b) Es creciente si $x > 1$.
c) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMAS (52 %)

1. Dado el sistema: $\begin{cases} mx-y+3z=m \\ 2x+4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m. (1,4 puntos)
b) Resuélvelo para $m = 0$. (0,6 puntos)

2. Diagonaliza la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Puntuación: Determinación de D, 0,8 puntos; obtención de P, 0,8 puntos; cálculo de P^{-1}, 0,4 puntos).

3. Halla el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$, en el punto $x = 0$.

(Puntuación: Derivadas bien hechas, 0,8 puntos. Polinomio de Taylor simplificado, 0,4 puntos).

Alcalá de Henares, 10 de marzo de 2015

SOLUCIONES

1. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$ es:

a) 3, si $a = 1$. b) 3, si $a \neq -2$.
c) 2, para cualquier valor de a.

Solución:

a) El rango de la matriz dada no varía si se hacen las transformaciones de Gauss que se indican:

$$A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{array}{c} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array}\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como la fila 3ª es doble que la 2ª, $F3=2F2$, el rango es siempre menor que 3.

Como el menor $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2a+2-(2a+4)=-2\neq 0$, el rango siempre será 2.

La respuesta es c)

2. El sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases}$ tiene:

a) Una solución única.
b) Infinitas soluciones.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo compatible indeterminado, pues, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0$, ya que

$F3=F1+F2$. (Puede observarse que la tercera ecuación es la suma de las otras dos).
Por tanto tiene infinitas soluciones.

Aunque no se pide, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x+2y=-3z \end{cases}$.

$\rightarrow$ restando, $E2-E1$, se obtiene: $y=-2z$; $x = z$.

La solución puede escribirse como: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

La respuesta es b)

3. Para que la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tenga inversa es necesario que:

b) $a > b$. b) $a = b$. c) $a \neq b$.

Solución:

Para que exista la inversa de la matriz A es necesario que $|A|\neq 0$.

Como $|A|=\begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \Rightarrow$ La matriz dada tendrá inversa siempre que $a \neq b$.

La respuesta es c)

4. Los vectores $\vec{u}=(1,a,a)$, $\vec{v}=(0,0,1)$ y $\vec{w}=(0,\ 1,\ a)$ son perpendiculares dos a dos:

a) Solamente cuando $a = 0$.
b) Cuando $a = 0$ o $a = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Si $a = 0$, los vectores son: $\vec{u}=(1,0,0)$, $\vec{v}=(0,0,1)$ y $\vec{w}=(0,\ 1,\ 0)$.

En este caso: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 + 0 + 0 = 0$; $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0 + 0 + 0 = 0$; $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ en todos los casos los vectores son ortogonales.

Si $a = -1$, los vectores son: $\vec{u}=(1,-1,-1)$, $\vec{v}=(0,0,1)$ y $\vec{w}=(0,\ 1,\ -1)$.

En este caso: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 + 0 - 1 \neq 0 \rightarrow$ No son ortogonales.

La respuesta es a)

5. Los vectores $\vec{u}=(a,a,0)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(0,\ b,\ a)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$:

a) Cuando $a = 0$ y b cualquiera.
b) Cuando $a \neq 0$ y b cualquier valor.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que formen base es necesario que sean linealmente independientes: Para ello el determinante asociado debe ser distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a \quad -ba^2 = a(b-a) \Rightarrow \text{Su valor es 0 cuando } a = 0 \text{ o cuando } a = b.$$

Por tanto:

- Si $a = 0$ el determinante es 0 y los vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ No vale a)
- Si $a \neq 0$ pero $b = a$, el determinante también valdría 0. Luego b debería tomar cualquier valor menos el que tome $a \Rightarrow$ No vale b)

La respuesta es c)

6. Si B es una matriz cuadrada de tamaño 3×3 que verifica que $B^2 = 4I$, siendo I la matriz unidad, entonces:

a) El determinante de B vale ± 8.
b) El determinante de B vale ± 2.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Por una de las propiedades de los determinantes se sabe que: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$. En este caso, se tendrá que $|B\cdot B| = |B|\cdot|B| = |B|^2$.

Otra propiedad dice: Para una matriz cuadrada, A, de orden n se cumple: $|kA| = k^n|A|$. En particular, si I es la matriz unidad de orden 3, $|4I| = 4^3|I| = 4^3$

Por tanto, como $B^2 = 4I$, se tendrá que $|B^2| = 4^3|I| = 4^3 = 64 = |B|^2 \Rightarrow |B| = \pm 8$.

La respuesta es a)

7. La derivada de $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$ toma valores positivos:

a) Siempre, para todo x de su dominio.
b) Cuando $x > 3$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f'(x)=\dfrac{-2(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^2} \Rightarrow$ Será positiva cuando los sea el numerador:

$$-2(2x-3)>0 \Rightarrow -4x+6>0 \Rightarrow 6>4x \Rightarrow x<\frac{3}{2}.$$

(Habría que quitar $x = 0$, pues en ese punto la función no está definida).

La respuesta es c)

8. La función definida como $f(x)=e^x(x-2)$.

a) Tiene un mínimo en $x = 2$.

b) Es creciente si $x > 1$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Derivando: $f'(x)=e^x(x-2)+e^x=e^x(x-1)$.

La derivada se anula en $x = 1$.

- Si $x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.

La respuesta es b)

PROBLEMAS

1. Dado el sistema: $\begin{cases} mx-y+3z=m \\ 2x+4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m. (1,4 puntos)

b) Resuélvelo para $m = 0$. (0,6 puntos)

Solución:

Considerando las matrices A, de coeficientes del sistema, y M ampliada con los términos independientes, el sistema será compatible cuando esas matrices tengan el mismo rango; cuando el rango de A es menor que el de M el sistema no tiene solución.

Con esto: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)=M$. El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4m-6$.

Por tanto:

- si $m \neq \dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow |A|\neq 0$ y el rango de A vale 3. En este caso, el sistema será compatible.
- si $m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow |A|=0$ y el rango de A vale 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

En este caso, la matriz M queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -1 & 3 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)=M$

Como el menor $M_1=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=10+3\neq 0$, se deduce que el rango de M es 3.

En consecuencia, si $m = \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible.

b) Para $m = 0$, el sistema inicial, que es compatible determinado, es $\begin{cases} -y+3z=0 \\ 2x \quad +4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$.

Puede resolverse mediante transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} -y+3z=0 \\ 2x \quad +4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+3z=0 \\ 2x \quad +4z=1 \\ x \quad -z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow E2-2E3 \begin{cases} -y+3z=0 \\ 6z=5 \\ x \quad -z=-2 \end{cases}$$

$E3-E1$

Despejando ordenadamente, se obtiene: $z=\frac{5}{6}$; $y=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$; $x=-\frac{7}{6}$.

2. Diagonaliza la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Puntuación: Determinación de D, 0,8 puntos; obtención de P, 0,8 puntos; cálculo de P^{-1}, 0,4 puntos).

<u>Solución</u>:

La ecuación característica es:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)=0$$

Los autovalores son: $\lambda = 2$; $\lambda = -1$, doble.

- Si $\lambda = -1$, se tiene: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3z=0 \\ 3x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y= \quad h \\ z=-t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como hay dos autovectores asociados a $\lambda = -1$ la matriz es diagonalizable.

- Si $\lambda = 2$, el autosistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

La matriz $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matriz de paso $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Inversa: $P^{-1}=\frac{(P_{ij})^t}{|P|}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alternativa: $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Halla el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$, en el punto $x = 0$.

Puntuación: Derivadas bien hechas, 0,8 puntos. Polinomio de Taylor simplificado, 0,4 puntos).

<u>Solución</u>:

$$f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right) \Rightarrow f(1)=\ln 1=0$$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \Rightarrow f''(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{(-4x-2)\cdot\left(x^2+x+1\right)^2-\left(-2x^2-2x+1\right)\cdot 2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{(-4x-2)\cdot\left(x^2+x+1\right)-\left(-2x^2-2x+1\right)\cdot 2(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{4x^3+6x^2-6x-4}{\left(x^2+x+1\right)^3} \Rightarrow f'''(0)=-4$$

Por tanto:

$$P(x)=0+1\cdot x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3$$