I.E.S. COMPLUTENSE
Alcalá de Henares (Madrid)
Fecha: 13 – 5 – 2019

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS DE 2º BACHILLERATO

(Recuperación de la 3ª Evaluación)

1) Determina los valores de a y b para que la función f(x) = $\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ 2a + b\,\text{sen}\,x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en **R**. (1,5 p.)

2) Calcula justificadamente $\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x - e^x + \text{sen}\,3x}{x^2}$ (0,7 p.)

3) Se considera la función f(x) = $\frac{x^3}{x^2 - 1}$
   a) Indica el dominio de definición y halla sus asíntotas, si existen. (0,9 p.)
   b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen. (0,9 p.)

4) Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble de otro y que la suma de los cuadrados de los tres sea mínima. (1 p.)

5) Calcula las siguientes integrales:
   a) $\int 2xe^{5x}\,dx$ b) $\int \left[\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] dx$ (1,4 p.)

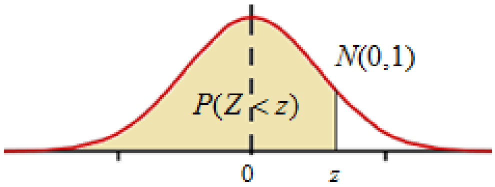
6) a) Dibuja la curva f(x) = $2x^3 - 3x^2$. (Indica los cortes con los ejes y los máximos y mínimos, si los tiene). (0,7 p.)
   b) Halla el área del recinto limitado por esa curva y el eje OX. (0,8 p.)

7) En una clase de Bachillerato, el 60 % de los alumnos aprueban Matemáticas, el 50 % aprueban Inglés y el 30 % aprueban las dos asignaturas. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar:
   a) Apruebe alguna de las dos asignaturas. (0,5 p.)
   b) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado Inglés. (0,5 p.)

8) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:
   a) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. (0,5 p.)
   b) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. (0,5 p.)

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo z.



Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

I.E.S. "COMPLUTENSE" *Departamento de Matemáticas*
Alcalá de Henares (Madrid

SOLUCIONES DEL EXAMEN

1) f(x) = $\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ 2a + b\,\text{sen}\,x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función f(x) es continua y derivable en **R** – {0} porque está formada por dos funciones continuas y derivables. El único punto que presenta dudas es x = 0, en donde la función es diferente a izquierda y derecha.

La función f(x) será continua en x = 0 si coinciden los límites laterales y, además, son iguales a f(0).

f(0) = 1; $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2a + b\,\text{sen}\,x) = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(x) es continua en x = 0 si 1 = 2a $\Rightarrow$ a = 1/2.

La función f(x) será derivable en x = 0 si coinciden las derivadas laterales.

Excepto en x = 0, f'(x) = $\begin{cases} a e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ b\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f'(0⁻) = a y f'(0⁺) = b $\Rightarrow$ f(x) es derivable en x = 0 si a = b

f(x) es derivable en x = 0 si $\begin{cases} a = 1/2 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow$ a = b = 1/2

Por tanto, **f(x) es derivable en R si a = b = 1/2**.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \text{sen}\,3x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ =[L'Hôpital]= $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2 - e^x + 3\cos 3x}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ =[L'Hôpital]= = $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x - \text{sen}\,3x}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

3) f(x) = $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ **Dom f(x) = R – {±1}**.

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow$ **La recta x = –1 es asíntota vertical**.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow$ **La recta x = 1 es asíntota vertical**.

Dado que f(x) es una función racional en la que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, sabemos que tiene una asíntota oblicua: y = mx + n.

m = $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x^2 - 1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - x} = 1.$

n = $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x^2 - 1}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **La recta y = x es asíntota oblicua**.

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$.

Los valores x = 0 y $x = \pm\sqrt{3}$ junto con x = ±1 que no pertenecen al dominio, dividen a la recta real en seis intervalos: $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},-1)$, (–1, 0), (0, 1), $(1,\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3},\infty)$. Vamos a estudiar el signo de f´(x) en cada uno de ellos. Dado que el crecimiento o decrecimiento será permanente en todo el intervalo, bastará comprobar la variación en un punto cualquiera.

f´(–2) = 4/9 > 0 $\Rightarrow$ **f(x) es creciente en** $(-\infty,-\sqrt{3})$
f´(–1,5) = –1,08 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** $(-\sqrt{3},-1)$
f´(–0,5) = –1,22 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** (–1, 0)
f´(0,5) = –1,22 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** (0, 1)
f´(1,5) = –1,08 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** $(1,\sqrt{3})$
f´(2) = 4/9 > 0 $\Rightarrow$ **f(x) es creciente en** $(\sqrt{3},\infty)$

Como la función crece a la izquierda de $x = -\sqrt{3}$ y decrece a su derecha, en $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo relativo. Dado que $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, el punto **A**$\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un **máximo relativo**.

Como la función decrece a la izquierda de $x = \sqrt{3}$ y crece a su derecha, en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo relativo. Dado que $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, el punto **B**$\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un **mínimo relativo**.

4) Si llamamos x, y, z a los números buscados, sabemos que se cumple que z = 2x y que x + y + z = 14.
Hay que minimizar la función dada por la suma de los cuadrados.
Por tanto, la función objetivo es: $S(x, y) = x^2 + y^2 + (2x)^2 = 5x^2 + y^2$
Sabiendo que x + y + z = 14 $\Rightarrow$ x + y + 2x = 14 $\Rightarrow$ y = 14 – 3x.
Por tanto $S(x) = 5x^2 + (14-3x)^2 = 14x^2 - 84x + 196$
S'(x) = 28x – 84 S'(x) = 0 $\Rightarrow$ 28x – 84 = 0 $\Rightarrow$ x = 3
S''(x) = 28 $\Rightarrow$ S''(3) = 28 > 0 $\Rightarrow$ en x = 3 hay un mínimo relativo.
x = 3 $\Rightarrow$ y = 14 – 3 · 3 = 5 z = 2 · 3 = 6
Los números buscados son 3, 5 y 6.

5) a) $\int 2xe^{5x}\,dx$ La haremos por partes, tomando:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \qquad dv = e^{5x}\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{5}e^{5x}$

$$\int 2xe^{5x}\,dx = 2x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int 2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}xe^{5x} - \int\frac{2}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}xe^{5x} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}e^{5x} + C =$$

$$= \boxed{\frac{2}{5}xe^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C}$$

b) $\int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] dx = \int \frac{x}{x^2-4}dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$

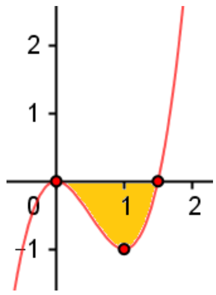
Vamos a hacerlas por separado:

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4)$$

En la segunda integral se hace el cambio de variable: $\ln(x+1) = t \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = dt$

Entonces, $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{[\ln(x+1)]^2}{2}$

Por tanto, $\int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2-4) + \frac{[\ln(x+1)]^2}{2} + C}$



6) a) Veamos los puntos de corte de $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ con el X.
$2x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3/2$.
Derivando: $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \to$ se anula en $x = 0$ y en $x = 1$.
$f''(x) = 12x - 6 \to f''(0) = -6 < 0$, máximo; $f''(1) = 6 > 0$, mínimo.
Puntos: $(-1, -5)$; $(0, 0)$; $(1, -1)$; $(3/2, 0)$; $(2, 4)$.

b) Como $f(x) < 0$ en el intervalo $[0, 3/2]$, el área pedida es:

$$S = -\int_0^{3/2} (2x^3 - 3x^2)\,dx = -\left[\frac{x^4}{2} - x^3 \right]_0^{3/2} = -\left[\frac{81/16}{2} - \frac{27}{8} \right] = -\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \boxed{\frac{27}{32}u^2}$$

7) M = {aprobar Matemáticas} I = {aprobar Inglés}
$P(M) = 0,6$ $P(I) = 0,5$ $P(M \cap I) = 0,3$
$P(\bar{L}) = 0,6 \Rightarrow P(L) = 1 - P(\bar{L}) = 0,4$
a) $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 =$ **0,8**
b) $P(M/I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,3}{0,5} =$ **0,60**

8) Si la varianza es $4 \Rightarrow \sigma = 2$. La distribución es una normal $N(25, 2) \to$ Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-25}{2}$.

a) $P(22 < X < 28) = P(X < 28) - P(X < 22) = P\left(Z < \frac{28-25}{2}\right) - P\left(Z < \frac{22-25}{2}\right) =$
$= P(Z < 1,5) - P(Z < -1,5) = 0,9332 - (1 - 0,9332) = 0,8664$.

b) Sea *c* la capacidad mínima buscada. Se desea que el 97,5 % de las descargas del refresco no se derrame; luego, debe cumplirse que:

$P(X < c) = 0,975 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c-25}{2}\right) = 0,975 \Rightarrow \frac{c-25}{2} = 1,96 \Rightarrow c = 28,92$ cl $\to$ 29 cl.