I.E.S. COMPLUTENSE

Alcalá de Henares (Madrid)

Fecha: 13 – 5 – 2019

EXAMEN DE MATEMÁTICAS DE 2º BACHILLERATO

1) En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0,3$ y p(A/B) = 0,5. Calcula:
   a) p(A) y p(B). (1 p.)
   b) $p(A \cup B)$ y p(B/A) (1 p.)
   c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0,5 p.)

2) En una clase de Bachillerato, el 60 % de los alumnos aprueban Matemáticas, el 50% aprueban Inglés y el 30 % aprueban las dos asignaturas. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar:
   a) Apruebe alguna de las dos asignaturas. (0,7 p.)
   b) Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado Inglés. (0,8 p.)

3) En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, y sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra? (0,7 p.)
   b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcula la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también. (0,8 p.)

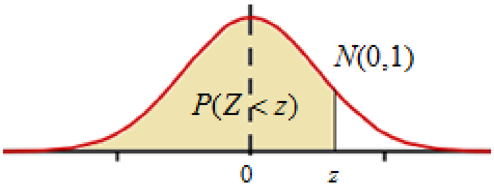
4) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:
   a) Obtener exactamente tres caras. (0,6 p.)
   b) Obtener más de tres caras. (0,9 p.)

5) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:
   a) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. (0,8 p)
   b) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. (0,7 p.)

6) La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.
   a) ¿Cuál es la desviación típica? (0,8 p.)
   b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años? (0,7 p.)

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo *z*.



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

I.E.S. "COMPLUTENSE" *Departamento de Matemáticas*
Alcalá de Henares (Madrid)

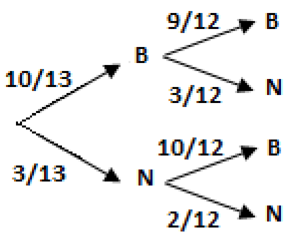
SOLUCIONES DEL EXAMEN

1) $p(A \cap B) = 0,3$; $p(A/B) = 0,5$.
   A y B independientes $\Rightarrow$ $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$.
   a) $\mathbf{p(A)} = p(A/B) = \mathbf{0,5.}$
      $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow 0,3 = 0,5 \cdot p(B) \Rightarrow$ **p(B) = 0,6.**

   b) Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
      $p(A \cup B) = 0,5 + 0,6 - 0,3 = \mathbf{0,8.}$ $\mathbf{p(B/A)} = p(B) = \mathbf{0,6.}$
   c) Por una de las leyes de Morgan:
      $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,8 = \mathbf{0,2.}$

2) M = {aprobar Matemáticas}; I = {aprobar Inglés}.
   $P(M) = 0,6$; $P(I) = 0,5$; $P(M \cap I) = 0,3$.
   a) $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = \mathbf{0,8.}$
   b) $P(M/I) = \dfrac{P(M \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0,3}{0,5} = \mathbf{0,60.}$

3) N = sacar bola negra b = sacar bola blanca



a) P(2ªN) =P(1ªB)·P(2ªN/1ªB) + P(1ªN)·P(2ªN/1ªN) =
$$= \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} = \frac{36}{156} = \mathbf{3/13}$$

b) $$P(1^aN/2^aN) = \frac{p(1^aN) \cdot p(2^aN/1^aR)}{p(2^aN)} = \frac{\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12}}{3/13} = \mathbf{1/6}$$

4) La variable X que cuenta el número de caras que se obtienen al lanzar cinco veces la moneda trucada es una binomial de parámetros n = 5 y p = 0,6. Es decir, B(5; 0,6).

   a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,3^2 = 10 \cdot 0,03456 = \mathbf{0,3456}$

   b) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 + \binom{5}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^0 =$
      $= 5 \cdot 0,05184 + 1 \cdot 0,07776 = \mathbf{0,33696}$

5) Si la varianza es 4 $\Rightarrow \sigma = 2$. La distribución es una normal $N(25, 2)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-25}{2}$.

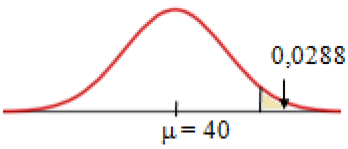
a) $P(22<X<28)=P(X<28)-P(X<22)=P\left(Z<\frac{28-25}{2}\right)-P\left(Z<\frac{22-25}{2}\right)=$

$= P(Z<1,5)-P(Z<-1,5)$ = 0,9332 – (1– 0,9332) = 0,8664.

b) Sea *c* la capacidad mínima buscada. Se desea que el 97,5 % de las descargas del refresco no se derrame; luego, debe cumplirse que:

$P(X<c)=0,975 \Rightarrow P\left(Z<\frac{c-25}{2}\right)=0,975 \Rightarrow \frac{c-25}{2}=1,96 \Rightarrow c = 28,92$ cl → 29 cl.

6) La distribución de edad de la población es como se indica en la figura adjunta.



Se sabe que $P(X>60)=0,0228$.

Como la normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 40 y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X>60)=P\left(Z>\frac{60-40}{\sigma}\right)=0,0228 \Leftrightarrow P\left(Z>\frac{20}{\sigma}\right)=0,0228 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=1-0,0228=0,9772 \Rightarrow \frac{20}{\sigma}=2 \Rightarrow \sigma=10.$$

Esto es, la desviación típica vale 10.

b) $P(X<35)=P\left(Z<\frac{35-40}{10}\right)=P(Z<-0,5)=1-P(Z<0,5)=1-0,6915=0,3085$.

Esta probabilidad equivale al 30,85 %.