I.E.S. COMPLUTENSE
Alcalá de Henares (Madrid)
Fecha: 13 – 5 – 2019

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS DE 2º BACHILLERATO

1) Dado el número real k se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1-k & 1 & 2 \\ k & k^2 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Obtén los valores del número real k para los que la matriz A tiene inversa. (0,7 p.)
   b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A cuando k = 0. (0,8 p.)

2) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de m.

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$ (1,5 p.)

3) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

   a) Estudia la posición relativa de π y r. (0,5 p.)
   b) Calcula la distancia entre r y π. (0,5 p.)
   c) Calcula el punto P’ simétrico de P(3, 2, 1) respecto del plano π . (1 p.)

4) Calcula justificadamente $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - 2x - e^x + \operatorname{sen} 3x}{x^2}$ (0,7 p.)

5) Se considera la función f(x) = $\frac{x^3}{x^2 - 1}$

   a) Indica el dominio de definición y halla sus asíntotas, si existen. (0,8 p.)
   b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen. (1 p.)

6) Calcula $\int 2xe^{5x}\,dx$ (0,7 p.)

7) Determina el área del recinto encerrado por las funciones $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = 1$. (0,8 p.)

8) En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, y sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra? (0,5 p.)
   Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcula la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también. (0,5 p.)

I.E.S. "COMPLUTENSE" *Departamento de Matemáticas*
Alcalá de Henares (Madrid

SOLUCIONES DEL EXAMEN

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1-k & 1 & 2 \\ k & k^2 & -1 \end{pmatrix}$

a) La inversa de A existe cuando $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1-k & 1 & 2 \\ k & k^2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2k^2 + k^2 - k^3 - (k + 2k^2 - k + k^2) = -k^3 - 1$$

$-k^3 - 1 = 0 \Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$

$k \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0$. Por tanto, **A tiene inversa cuando $k \neq -1$**.

b) $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $|A| = -1$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

2) $\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$

Las matrices asociadas al sistema son $A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$

$|A| = m^2 - m - 2 \qquad m^2 - m - 2 \Rightarrow = m = -1$ y $m = 2$

Según los valores de m se tienen los siguientes casos:

- **m = –1**

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$$

$|A| = 0 \Rightarrow$ rango de $A \leq 2$

El menor $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

El menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow$ rango M = 3

rango A ≠ rango M $\Rightarrow$ El sistema es **incompatible**. No tiene solución.

- **m = 2**

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$$

Como $F_1 = 2F_2 + 3F_3$, el rango de A = rango de M ≤ 2.

El menor $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2 = rango M < nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ El sistema es **compatible indeterminado.** Tiene infinitas soluciones.

- **m ≠ –1 y m ≠ 2**

En este caso, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 3 = rango de M = nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ El sistema es **compatible determinado.** Tiene solución única.

3) $\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$ $\qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

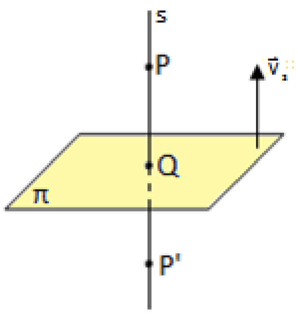
a) Sustituyendo las ecuaciones de r en el plano π:
$2(1 - 2t) - (2 - 2t) + 2(1 + t) + 3 = 0 \Rightarrow 5 = 0$, lo cual es absurdo.
Esto significa que **la recta y el plano son paralelos**.

b) Como la recta r es paralela al plano π, la distancia entre r y π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π. Dado que P(1, 2, 1) $\in$ r, tenemos que:

d(r, π) = d(P, π) = $\dfrac{|2\cdot1-2+2\cdot1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \boxed{\dfrac{5}{3}\,\mathbf{u}}$

c) Si llamamos P'(a, b, c) al punto simétrico del P(3, 2, 1) respecto del plano π, sabemos que ambos puntos están en la recta s, perpendicular a π por el punto P. También sabemos que el punto Q, corte de la recta y el plano, tiene que ser el punto medio de P y P'.

$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (2, -1, 2) \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$



Haciendo $s \cap \pi$, tenemos que: $2(3 + 2t) - (2 - t) + 2(1 + 2t) + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$.

Por tanto, sustituyendo t = –1 en s, tenemos que Q(1, 3, –1).

Q es el punto medio entre P y P' $\Rightarrow (1, 3, -1) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$

$\frac{3+a}{2} = 1 \Rightarrow a = -1$, $\quad \frac{2+b}{2} = 3 \Rightarrow b = 4$, $\quad \frac{1+c}{2} = -1 \Rightarrow c = -3$

Por tanto, **P'(–1, 4, –3)**.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2x-e^x+\text{sen}\,3x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = [\text{L'Hôpital}] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2-e^x+3\cos 3x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = [\text{L'Hôpital}] =$ $=$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^x-\text{sen}\,3x}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

5) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ **Dom f(x) = R – {±1}**.

$\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \Rightarrow$ **La recta x = –1 es asíntota vertical**.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \Rightarrow$ **La recta x = 1 es asíntota vertical**.

Dado que f(x) es una función racional en la que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, sabemos que tiene una asíntota oblicua: y = mx + n.

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x^2-1}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **La recta y = x es asíntota oblicua**.

b) $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$

Los valores x = 0 y x = $\pm\sqrt{3}$ junto con x = ±1 que no pertenecen al dominio, dividen a la recta real en seis intervalos: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, (–1, 0), (0, 1), $(1, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$. Vamos a estudiar el signo de f´(x) en cada uno de ellos. Dado que el crecimiento o decrecimiento será permanente en todo el intervalo, bastará comprobar la variación en un punto cualquiera.

f´(–2) = 4/9 > 0 $\Rightarrow$ **f(x) es creciente en** $(-\infty, -\sqrt{3})$

f´(–1,5) = –1,08 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** $(-\sqrt{3}, -1)$

f´(–0,5) = –1,22 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** (–1, 0)

f´(0,5) = –1,22 < 0 $\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** (0, 1)

$f'(1,5) = -1,08 < 0 \;\Rightarrow$ **f(x) es decreciente en** $\left(1, \sqrt{3}\right)$

$f'(2) = 4/9 > 0 \;\Rightarrow$ **f(x) es creciente en** $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$

Como la función crece a la izquierda de x = $-\sqrt{3}$ y decrece a su derecha, en x = $-\sqrt{3}$ hay un máximo relativo. Dado que $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, el punto **A**$\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un **máximo relativo**.

Como la función decrece a la izquierda de x = $\sqrt{3}$ y crece a su derecha, en x = $\sqrt{3}$ hay un mínimo relativo. Dado que $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, el punto **B**$\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un **mínimo relativo**.

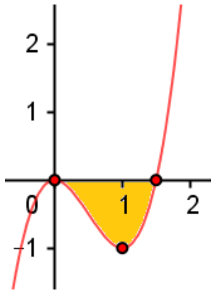
6) a) Veamos los puntos de corte de $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ con el X.

$2x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3/2$.

Derivando: $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \to$ se anula en x = 0 y en x = 1.

$f''(x) = 12x - 6 \to f''(0) = -6 < 0$, máximo; $f''(1) = 6 > 0$, mínimo.

Puntos: (–1, –5); (0, 0); (1, –1); (3/2, 0); (2, 4).

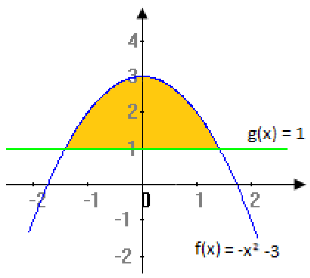


b) Como f(x) < 0 en el intervalo [0, 3/2], el área pedida es:

$$S = -\int_0^{3/2}(2x^3 - 3x^2)\,dx = -\left[\frac{x^4}{2} - x^3\right]_0^{3/2} = -\left[\frac{81/16}{2} - \frac{27}{8}\right] = -\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \boxed{\frac{27}{32}u^2}$$

7) $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = 1$.

Si se trazan las gráficas, dando valores, se obtiene la figura adjunta.



Puntos de corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

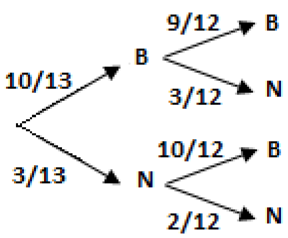
Los puntos de corte son: $\left(-\sqrt{2}, 1\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 1\right)$

Entre x = $-\sqrt{2}$ y x = $\sqrt{2}$ la gráfica de $f(x) = -x^2 + 3$ siempre está por encima de la de g(x) = 1.

Por la simetría del recinto, tenemos que el área es:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(-x^2 + 3 - 1\right)dx = 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(-x^2 + 2\right)dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right) = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$

8) N = sacar bola negra b = sacar bola blanca



a) P(2ªN) =P(1ªB)·P(2ªN/1ªB) + P(1ªN)·P(2ªN/1ªN) =

$$= \frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12} + \frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12} = \frac{36}{156} = \mathbf{3/13}$$

b) $$P(1ªN/2ªN) = \frac{p(1ªN)\cdot p(2ªN/1ªR)}{p(2ªN)} = \frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}{3/13} = \mathbf{1/6.}$$