EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

ANÁLISIS (INTEGRALES)

1. (2,4 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 3\cos(2x-1)\,dx$ b) $\int x^2\cdot(3-x)^2\,dx$

c) $\int \frac{1}{5}x^2e^{-5x^3}\,dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

2. Calcula:

a) $\int \frac{x^3-2x+5}{x-2}\,dx$ (1,2 puntos)

b) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (1,2 puntos) $\to$ (Puede hacerse el cambio $1+x=t^2$).

3. (Murcia, septiembre 18)

a) (0,7 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sin x e^{\cos x}dx$.

b) (1 punto) Determine el área del recinto limitado por el eje *OX*, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \sin x e^{\cos x}$.

4. (1,5 puntos) Calcula la integral indefinida $\int x^2\cdot\ln(2x)\,dx$.

5. (2 puntos) Dibuja el recinto finito del plano limitado por la curva $y = x^3-3x^2+3x$ y la recta $y = x$. Calcula su área.

Alcalá de Henares, 24 de abril de 2019.

Soluciones

1. (2,4 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 3\cos(2x-1)\,dx$ b) $\int x^2\cdot(3-x)^2\,dx$ c) $\int \frac{1}{5}x^2 e^{-5x^3}dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

Solución:

a) Ajustando constantes:

$$\int 3\cos(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}\int 2\cos(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+c.$$

b) Operando el integrando se tiene:

$$\int x^2\cdot(3-x)^2\,dx = \int x^2\cdot(9-6x+x^2)\,dx = \int (9x^2-6x^3+x^4)\,dx = 3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+c.$$

c) Ajustando constantes:

$$\int \frac{1}{5}x^2 e^{-5x^3}dx = -\frac{1}{15\cdot 5}\cdot\int (-15x^2)e^{-5x^3}dx = -\frac{1}{75}e^{-5x^3}+c.$$

d) $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}dx = -2\cdot\int \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}dx = -2\sqrt{4-x}+c.$$

2. Calcula:

a) $\int \frac{x^3-2x+5}{x-2}dx$ (1,2 puntos)

b) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (1,2 puntos) $\to$ (Puede hacerse el cambio $1+x=t^2$).

Solución:

a) Se divide el integrando $(x^3-2x+5):(x-2)$ $\to$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 9 \end{array}$$

$\to$ El cociente de la división es $c(x)=x^2+2x+2$; el resto, r = 9.

Por tanto:

$$\int \frac{x^3-2x+5}{x-2}dx = \int\left(x^2+2x+2+\frac{9}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+2x+9\ln(x-2)+c.$$

b) Si $1+x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$; $x=t^2-1$; $\sqrt{1+x}=t$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2tdt = \int (2t^4-2t^2)\,dt = \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+c = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+c.$$

3. (Murcia, septiembre 18)

a) (0,7 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sin x e^{\cos x}dx$.

b) (1 punto) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales x = 0 y x = π/2, y la gráfica de la función $f(x)=\sin x e^{\cos x}$.

Solución:

a) La integral $\int \sin x e^{\cos x} dx$ es inmediata.

Basta con recordar la fórmula $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$, y ajustar constantes:

$$\int \sin x e^{\cos x} dx = -\int (-\sin x) e^{\cos x} dx = -e^{\cos x} + c.$$

b) Como en el intervalo de integración la función estudiada es positiva, el área viene dada por la integral definida $\int_0^{\pi/2} \sin x e^{\cos x} dx$, cuyo valor es:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x e^{\cos x} dx = \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\pi/2} = -e^{\cos\frac{\pi}{2}} - \left(-e^{\cos 0}\right) = -e^0 + e^1 = e - 1 \text{ u}^2.$$

4. (1,5 puntos) Calcula la integral indefinida $\int x^2 \cdot \ln(2x) dx$.

Solución:

Para hallar $\int x^2 \ln(2x) dx$ se toma:

$$u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{2}{2x} dx = \frac{1}{x} dx; \quad dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Por tanto:

$$\int x^2 \ln(2x) dx = \ln(2x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \frac{x^3}{9} + c.$$

5. (2 puntos) Dibuja el recinto finito del plano limitado por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$. Calcula su área.

Solución:

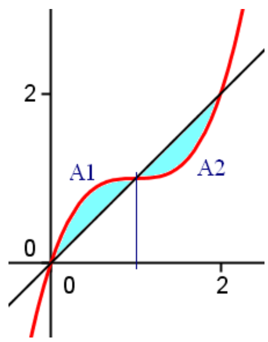
La curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$ se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y x = 2, que son las soluciones de $x^3 - 3x^2 + 3x = x \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$.

Los puntos de corte son (0, 0), (1, 1) y (2, 2).

La derivada de $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ es:

$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \to$ nunca es decreciente; en $x = 1$ tiene un punto estacionario.

$y'' = 6x - 6 \to$ se anula en $x = 1 \Rightarrow$ (1, 1) es punto de inflexión.



Con esto, trazando los puntos, se obtiene la región acotada sombreada en la figura adjunta.

El área pedida es

$$A = A1 + A2 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) + \left(-4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{1}{2} \text{ u}^2.$$

Alcalá de Henares, 24 de abril de 2019.