EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)
ANÁLISIS (DERIVADAS)

1. (Castilla–La Mancha, junio 17)
(1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$, calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

2. (1 punto) Probar que la ecuación $x^{2019}-e^x+2=0$ tiene alguna solución.

3. (1,5 puntos) Demuestra que la función $f(x)=2x+\sin(2x)$ siempre es creciente y que tiene puntos de inflexión en los puntos $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in$ **Z**.

4. a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ en el punto de abscisa $x=0$.
a) (1 punto) Para la misma función, $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

5. (Galicia, septiembre 14)
(1 punto) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{\sin^2 x}$.

6. (País Vasco, julio 18)
a) (1,8 puntos) Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.
b) (0,5 puntos) Con la información obtenida esbozar su gráfica.

7. (1,2 puntos) Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f´(-2)$, si existe.

a) $f(x)=3x^2\cdot e^{x^2-2x}$ b) $f(x)=\frac{6x^2-3x}{x^2-2}$ c) $f(x)=\ln(5x)+\sin(x+2)-\cos\frac{x}{2}$

Alcalá de Henares, 19 de marzo de 2019.

Soluciones

1. (Castilla–La Mancha, junio 17)

(1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$, calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

Solución:

El único punto que presenta dudas es $x = 2$.

Continuidad: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a\,; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+bx-9\right)=-13+2b$$

Derivabilidad: las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(2x\right)=4\,; \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-2x+b\right)=-4+b$$

De $4=-4+b \Rightarrow b=8$.

Sustituyendo en $4+a=-13+2b \Rightarrow 4+a=3 \Rightarrow a=-1$.

La función debe ser: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

2. (1 punto) Probar que la ecuación $x^{2019}-e^x+2=0$ tiene alguna solución.

Solución:

Se aplica el teorema de Bolzano, que dice: Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos (por ejemplo, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Se considera la función $f(x)=x^{2019}-e^x+2$ que es continua en todo **R**, en particular en el intervalo $[-2, 0]$.

Como $f(-2)=(-2)^{2019}-e^{-2}+2<0$ y $f(0)=0-e^0+2=1>0$, entonces existe un punto $c \in [-2, 0]$ tal que $f(c) = 0$.

3. (1,5 puntos) Demuestra que la función $f(x)=2x+\sin(2x)$ siempre es creciente y que tiene puntos de inflexión en los puntos $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k \in$ **Z**.

Solución:

Derivando se tiene:

$$f(x)=2x+\sin(2x) \Rightarrow f'(x)=2+2\cos(2x)\ge 0, \text{ para todo } x.$$

En consecuencia, la función nunca es decreciente.

(En particular, puede estudiarse lo que sucede en el intervalo $[0, \pi]$, ya que $\cos(2x)$ es periódica de período π).

$$2+2\cos(2x)=0 \Rightarrow \cos(2x)=-1 \Rightarrow 2x=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

- Si $0<x<\frac{\pi}{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, la función siempre es creciente (no tiene máximos ni mínimos); pero en los puntos $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ la tangente a la curva es horizontal (tiene pendiente 0): en esos puntos se da una inflexión con tangente horizontal.

→ También puede verse estudiando la derivada segunda:

$f''(x)=-4\sin(2x)$, que se anula en $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

La derivada tercera, $f'''(x)=-8\cos(2x)$, toma valores distintos de cero en $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Luego, en $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ hay un punto de inflexión.

4. a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

a) (1 punto) Para la misma función, $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

<u>Solución</u>:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$.

Como $f'(x)=\frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow f'(0)=1$ y $f(0)=0$.

La recta pedida es: $y-0=1\cdot(x-0) \to y=x$.

b) La pendiente de la recta tangente a una curva $y=f(x)$, en un punto, viene dada por el valor de la derivada de la función, $f'(x)$, en ese punto.

En este caso se desea que $f'(x)=1$. Esto es:

$$\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=1 \Rightarrow 1+x^2=\left(1-x^2\right)^2 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pm\sqrt{3}.$$

Para $x = 0$, $f(0)=0 \to$ punto (0, 0). Para $x=\sqrt{3}$, $f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \to$ punto $\left(\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para $x=-\sqrt{3}$, $f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \to$ punto $\left(-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. (Galicia, septiembre 14)

(1 punto) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{\sin^2 x}$.

<u>Solución</u>:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{\sin^2 x}=\left[\frac{1-1-0}{0}=\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2e^{-2x}-2}{2\sin x\cdot\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \text{(se aplica nuevamente L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-4e^{-2x}}{2\cos^2 x-2\sin^2 x}=\frac{-1-4}{2}=-\frac{5}{2}.$$

6. (País Vasco, julio 18)
a) (1,8 puntos) Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.
b) (0,5 puntos) Con la información obtenida esbozar su gráfica.
Solución:
Derivando:

$$f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{x} \to$$ se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

- Si $x < 0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $0 < x < 2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Se deduce que en $x = 0$ hay un mínimo.
- Si $x > 2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Se deduce que en $x = 2$ hay un máximo.

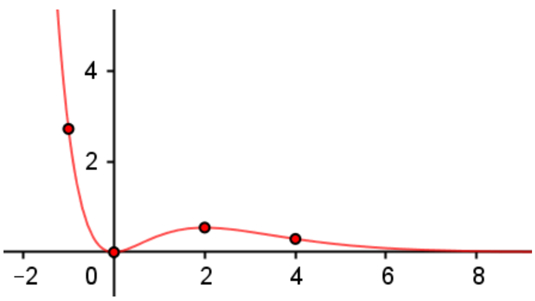
$\to$ La función no tiene asíntotas verticales, pues está definida en todo **R**.
Tiene una asíntota horizontal hacia $+\infty$, pues:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)\to$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Con los datos anteriores y dando algunos valores puede esbozarse su gráfica.
Puntos:
(0, 0), mínimo; (2, 0,54), máximo; (–1, e); (4, 0,29)



7. (1,2 puntos) Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-2)$, si existe.

a) $f(x)=3x^2\cdot e^{x^2-2x}$ b) $f(x)=\dfrac{6x^2-3x}{x^2-2}$ c) $f(x)=\ln(5x)+\sin(x+2)-\cos\dfrac{x}{2}$

Solución:
a) $f(x)=3x^2\cdot e^{x^2-2x} \Rightarrow f'(x)=6x\cdot e^{x^2-2x}+3x^2\cdot(2x-2)e^{x^2-2x}=(6x^3-6x^2+6x)\cdot e^{x^2-2x} \to$

$f'(-2)=-84\cdot e^{8}$.

b) $f(x)=\dfrac{6x^2-3x}{x^2-2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(12x-3)\cdot(x^2-2)-(6x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2-24x+6}{(x^2-2)^2} \to$

$f'(-2)=\dfrac{12+48+6}{4}=\dfrac{33}{2}$.

c) $f(x)=\ln(5x)+\sin(x+2)-\cos\dfrac{x}{2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}+\cos(x+2)+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} \to f'(-2)$ no existe, pues la función no está definida en $x = -2$.

Alcalá de Henares, 19 de marzo de 2019.