EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

ANÁLISIS (Recuperación con integrales)

1. (Cataluña, junio 18) (1 punto) Sea la función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.
Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo [0, 2] y que, por lo tanto, la ecuación $f(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2). Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x)=0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

2. (Cantabria, septiembre 18) (1 punto) Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$.

3. a) (0,8 puntos) Calcula los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ en los que la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$.
b) (0,7 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^3-5x^2+7x$ en el punto de abscisa $x = 3$.

4. (Islas Canarias, junio 18)
(2 puntos) Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=3x+\dfrac{3x}{x-1}$.

5. (Madrid, julio 18)
Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ y se pide:
a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) (0,75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$.

6. (2 puntos) Calcula las siguientes integrales:
a) $\int 3\cos\left(2x-1\right)dx$ (0,5 puntos) b) $\int x^2\cdot\left(3-x\right)^2 dx$ (0,5 puntos)
c) $\int x\sqrt{1+x}\ dx$ (1 punto) $\to$ (Puede hacerse el cambio $1+x=t^2$).

Alcalá de Henares, 24 de abril de 2019.

Soluciones

1. (Cataluña, junio 18) (1 punto) Sea la función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.
Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo [0, 2] y que, por lo tanto, la ecuación $f(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2). Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x)=0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.
Solución:
El teorema de Bolzano dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.
La función es continua para todo $x \geq 0$; en particular en el intervalo [0, 2].
Como $f(0)=-2<0$ y $f(2)=\sqrt{2}+2-2>0$ $\Rightarrow$ la función corta al eje OX en algún punto del intervalo (0, 2). Esto es, la ecuación $f(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2).
Efectivamente la solución es $x = 1$, pues $f(1)=\sqrt{1}+1-2=0$.
Su derivada, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1$, es positiva para $x > 0$ $\Rightarrow$ la función es creciente en todo su dominio.
Por tanto, solo cortará una vez al eje OX, lo que significa que la solución $x = 1$ es única.

2. (Cantabria, septiembre 18) (1 punto) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(2x^2\right)\cdot 4x+1}{\dfrac{1}{x+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

3. a) (0,8 puntos) Calcula los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ en los que la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$.
b) (0,7 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^3-5x^2+7x$ en el punto de abscisa $x = 3$.
Solución:
a) Los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$ son los que verifiquen que $f'(x)=4$.
Derivando e igualando a 4:

$$f'(x)=3x^2-10x+7=4 \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\begin{cases}3\\1/3\end{cases}.$$

Los puntos de la gráfica son:

$$\left(3,\, f(3)\right)=\left(3,\ 3\right);\ \left(1/3,\, f(1/3)\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{49}{27}\right).$$

b) La ecuación de la recta tangente pedida es: $y-f(3)=f'(3)\cdot\left(x-3\right)$.
Teniendo en cuenta lo visto en el apartado anterior:

$$y-3=4\cdot\left(x-3\right) \Rightarrow y=4x-9.$$

4. (Islas Canarias, junio 18)

(2 puntos) Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=3x+\dfrac{3x}{x-1}$.

Solución:

La función tiene dos asíntotas; una vertical, la recta $x = 1$, y otra oblicua, la recta $y=3x+3$.

En efecto:

$$\lim_{x\to 1}\left(3x+\frac{3x}{x-1}\right)=\left[3+\frac{3}{0}\right]=\pm\infty.$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-1}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(3x+\dfrac{3x}{x-1}\right)\equiv 3x+3$.

Derivando:

$$f(x)=3x+\frac{3x}{x-1} \Rightarrow f'(x)=3+\frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}=3+\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{3(x-1)^2-3}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x}{(x-1)^2}.$$

La derivada se anula cuando $3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$.

Luego:

- Si $x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0<x<2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. En $x=0$ se tiene un máximo relativo.
- Si $x>2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en $x = 2$ hay mínimo relativo.

5. (Madrid, julio 18)

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ y se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 2$ los límites laterales deben ser iguales a $f(2)=8$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 8e^{2x-4}=8e^0=8;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-4x}{x-2}=\frac{0}{0}=(L'H)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2-4}{1}=\frac{8}{1}=8.$$

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

b) La función tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$, pues:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 8e^{2x-4}=8e^{-\infty}=0 \to$ La asíntota es la recta $y = 0$.

No hay ninguna asíntota vertical, pues de haberla se daría en $x = 2$, pero se ha visto que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$.

c) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 8e^{2x-4}dx=\left[4e^{2x-4}\right]_0^2=4e^0-4e^{-4}=4-4e^{-4}$.

6. (2 puntos) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 3\cos(2x-1)\,dx$ (0,5 puntos) b) $\int x^2\cdot(3-x)^2\,dx$ (0,5 puntos)

c) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ (1 punto) → (Puede hacerse el cambio $1+x=t^2$).

Solución:

a) Ajustando constantes:

$$\int 3\cos(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}\int 2\cos(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+c.$$

b) Operando el integrando se tiene:

$$\int x^2\cdot(3-x)^2\,dx = \int x^2\cdot\left(9-6x+x^2\right)dx = \int\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx = 3x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+c.$$

c) Si $1+x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$; $x=t^2-1$; $\sqrt{1+x}=t$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int\left(t^2-1\right)t\cdot 2tdt = \int\left(2t^4-2t^2\right)dt = \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+c = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+c.$$

Alcalá de Henares, 24 de abril de 2019.