EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

ANÁLISIS (INTEGRALES)

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 2\cos(3x+2)\,dx$ (0,5 puntos) b) $\int x\cdot(1-2x)^2\,dx$ (0,6 puntos)

c) $\int 2e^{-5x}dx$ (0,3 puntos) d) $\int \frac{2x^2}{(3x^3-2)^4}dx$ (0,6 puntos)

2. Calcula:

a) $\int \frac{4x^2+2x-3}{x+2}dx$ (1 punto) b) $\int \frac{2x-3}{1+x^2}dx$ (0,5 puntos) c) $\int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (1 punto)

3. a) (1,5 puntos) Calcula la integral indefinida $\int x\sin(2x)\,dx$.

b) (1 punto) Aplicando el resultado anterior, halla el área del recinto limitado por el eje *OX*, las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x\sin(2x)$.

4. (1,5 puntos) Determina una función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (1, 4) y que su derivada es $f'(x)=1+\ln x$.

5. (2 puntos) Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y=x^2$ y la hipérbola $y=\frac{8}{x}$. Calcula su área.

Alcalá de Henares, 19 de abril de 2018.

1. Calcula las siguientes integrales:

b) $\int 2\cos(3x+2)dx$ (0,5 puntos) b) $\int x\cdot(1-2x)^2\, dx$ (0,6 puntos)

c) $\int 2e^{-5x}dx$ (0,3 puntos) d) $\int \frac{2x^2}{(3x^3-2)^4}dx$ (0,6 puntos)

Solución:

a) $\int 2\cos(3x+2)dx = \frac{2}{3}\int 3\cos(3x+2)dx = \frac{2}{3}\sin(3x+2)+c$.

b) Operando el integrando se tiene:

$$\int x\cdot(1-2x)^2\, dx = \int x\cdot(1-4x+4x^2)dx = \int (x-4x^2+4x^3)dx = \frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+x^4+c.$$

c) $\int 2e^{-5x}dx = -\frac{2}{5}\cdot\int (-5)e^{-5x}dx = -\frac{2}{5}e^{-5x}+c$.

d) Se transforma el integrando para expresarlo en la forma $\int f´(x)\cdot(f(x))^n\, dx$. Así:

$$\int \frac{2x^2}{(3x^3-2)^4}dx = \int 2x^2(3x^3-2)^{-4}\, dx = \frac{2}{9}\int 9x^2(3x^3-2)^{-4}\, dx =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{(3x^3-2)^{-3}}{-3}+c = -\frac{2}{27(3x^3-2)^3}+c$$

2. Calcula:

a) $\int \frac{4x^2+2x-3}{x+2}dx$ (1 punto) b) $\int \frac{2x-3}{1+x^2}dx$ (0,5 puntos) c) $\int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (1 punto)

Solución:

a) Se divide el integrando $(4x^2+2x-3):(x+2) \to$

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & 2 & -3 \\ -2 & & -8 & 12 \\ \hline & 4 & -6 & 9 \end{array}$$

El cociente de la división es $c(x)=4x-6$; el resto, $r = 9$.

Por tanto:

$$\int \frac{4x^2+2x-3}{x+2}dx = \int\left(4x-6+\frac{9}{x+2}\right)dx = 2x^2-6x+9\ln(x+2)+c.$$

b) Se descompone el integrando como sigue:

$$\int \frac{2x-3}{1+x^2}dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx - \int \frac{3}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2)-3\arctan x+c.$$

c) La primitiva es un arcoseno: debe saberse que $\int \frac{f´(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin f(x)+c$.

Hay que transformar la expresión buscando que aparezca $1-(f(x))^2$ en el interior de la raíz y $f'(x)$ en el numerador. El proceso puede ser el siguiente:

$$\int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}}dx = \int \frac{2}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx =$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c.$$

3. a) (1,5 puntos) Calcula la integral indefinida $\int x\sin(2x)\,dx$.

b) (1 punto) Aplicando el resultado anterior, halla el área del recinto limitado por el eje *OX*, las rectas $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x\sin(2x)$.

Solución:

a) La integral $\int x\sin(2x)\,dx$ puede hacerse por partes.

Tomando:

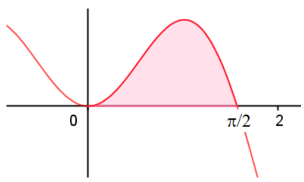
$x = u$ y $dv=\sin(2x)xdx \Rightarrow$

$dx = du$ y $v=\int \sin(2x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int 2\sin(2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Luego,

$$\int x\sin(2x)\,dx=-x\cdot\frac{1}{2}\cos(2x)+\int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+c.$$

b) En el intervalo $[0, \pi/2]$ la función dada es positiva (su gráfica es la adjunta; no se pide). Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida $\int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,dx$, cuyo valor es:



$$\int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\sin\pi-\left(-0\cos 0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=-\frac{\pi}{4}\cdot(-1)+\frac{1}{4}\cdot 0-\left(-0\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0\right)=\frac{\pi}{4}\ \text{u}^2.$$

4. (1,5 puntos) Determina una función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (1, 4) y que su derivada es $f'(x)=1+\ln x$.

Solución:

Si $f'(x)=1+\ln x \Rightarrow f(x)=\int(1+\ln x)\,dx=\int dx+\int \ln x\,dx$. La segunda integral se hace por partes.

Tomando: $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=dx \Rightarrow v=x$

De donde, $\int \ln x\,dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + c$.

Luego,

$$f(x)=\int(1+\ln x)dx \Rightarrow f(x)=x+x\ln x-x+c \Rightarrow f(x)=x\ln x+c.$$

Como pasa por (1, 4), $f(1)=1\cdot\ln 1+c=4 \to c=4$.

Por tanto, $f(x)=x\ln x+4$.

5. (2 puntos) Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y=x^2$ y la hipérbola $y=\dfrac{8}{x}$. Calcula su área.

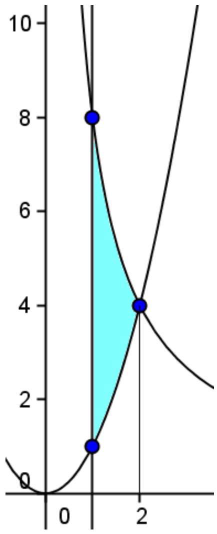
Solución:

Las gráficas se trazan fácilmente dando valores.

Algunos puntos:

Parábola $y=x^2$: (0, 0); (1, 1), (2, 4)

Hipérbola $y=\dfrac{8}{x}$: (1, 8); (2, 4); (4, 2); (8, 1)



Puntos de corte de la recta $x = 1$ con las curvas:
(1, 1) con la parábola; (1, 8) con la hipérbola

Corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=8/x \end{cases} \Rightarrow x^2=\frac{8}{x} \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

El recinto es el sombreado en la figura anterior. Su área viene dada por:

$$A=\int_1^2\left(\frac{8}{x}-x^2\right)dx = \left(8\ln x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 8\ln 2-\frac{8}{3}-\left(0-\frac{1}{3}\right)=8\ln 2-\frac{7}{3}\ \text{u}^2.$$

Alcalá de Henares, 19 de abril de 2018.