EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

ANÁLISIS (DERIVADAS)

1. a) (0,6 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) (0,6 puntos) Comprueba que la ecuación $e^{-x}+2x-1=0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1].

2. (Selectividad, Madrid 2015)

Dada la función: $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,7 puntos) Determina el dominio de *f* y sus asíntotas.

b) (1 punto) Calcula la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=0$.

3. (Castilla–La Mancha, junio 17)

(1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

4. (Castilla–La Mancha, junio 17)

Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ (0,5 puntos) b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ (1 punto)

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

5. (1,6 puntos) Calcula los valores de *a* y *b* para que la gráfica de $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).

6. (1,5 puntos) Halla dos números positivos que sumen 24 y tales que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

Alcalá de Henares, 20 de marzo de 2018.

Soluciones

1. a) (0,6 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) (0,6 puntos) Comprueba que la ecuación $e^{-x}+2x-1=0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1].

Solución:

a) Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.

b) La función $f(x)=e^{-x}+2x-1$ es continua y, además, cumple que:

$f(-2)=e^{2}-5$ = 2,389… > 0 y $f(-1)=e-3$ = –0,28… < 0

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c)=0$. Este valor c es la raíz de $e^{-x}+2x-1=0$ en el intervalo [–2, –1].

2. (Selectividad, Madrid 2015)

Dada la función: $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,7 puntos) Determina el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto) Calcula la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en x = 0.

Solución:

a) Dominio:

→ hay que exigir que x > –1, para que exista $\ln(x+1)$; además los denominadores no pueden tomar el valor 0: $x^2-4\neq 0; x+1\neq 0 \Rightarrow x=\pm 2; x\neq -1$.

Por tanto: $Dom(f)=(-1,+\infty)-\{2\}=(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

La función puede tener asíntotas verticales en x = –1, por la derecha, y en x = 2. Veamos:

En x = –1: $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{-\infty}{0^+}\to -\infty\right] \Rightarrow x=-1$ es una AV por la derecha.

En x = 2: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\left[\dfrac{2}{0}+\dfrac{\ln 3}{3}\to\infty\right] \Rightarrow x=2$ es otra AV.

También es posible que tenga una asíntota horizontal. Hay que calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\left[0+\frac{\infty}{\infty}\right]$$

El segundo límite puede hacerse por L´Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Por tanto, la recta y = 0 es asíntota horizontal.

b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{x^2-4-x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-4}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{3}{4}.$$

Como $f(0)=\frac{0}{-4}+\frac{\ln 1}{1}=0$, la recta tangente en x = 0 es:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot x\Rightarrow y=\frac{3}{4}x$$

3. (Castilla–La Mancha, junio 17)

(1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

Solución:

El único punto que presenta dudas es x = 2.

Continuidad: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a;\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+bx-9\right)=-13+2b.$$

Derivabilidad: las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x)=4;\qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(-2x+b)=-4+b$$

De $4=-4+b\Rightarrow b=8$.

Sustituyendo en $4+a=-13+2b\Rightarrow 4+a=3\Rightarrow a=-1$.

La función debe ser: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

4. (Castilla–La Mancha, junio 17)

Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ (0,5 puntos) b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ (1 punto)

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

Ambos límites pueden hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

a) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to -2}\frac{6x+6}{6x+10}=\frac{-6}{-2}=3.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{x+1}}{2\cos x}=\frac{2}{2}=1.$$

5. (1,6 puntos) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).

<u>Solución</u>:

Por pasar por (1/2, 4) $\Rightarrow$ $f(1/2) = 4 \to 4 = a\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{1/2} \Rightarrow a + 4b = 8$

Por tener un mínimo en x = 1/2, $f'(1/2) = 0$.

Como $f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1/2) = 0 = a - \dfrac{b}{1/4} \Rightarrow a - 4b = 0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + 4b = 8 \\ a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4;\ b = 1$

La función es $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

6. (1,5 puntos) Halla dos números positivos que sumen 24 y tales que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

<u>Solución</u>:

a) Sean x e y los números buscados.

Se desea que el producto $P = x\cdot y^2$ sea máximo.

Como se cumple que $x + y = 24 \Rightarrow x = 24 - y$.

Sustituyendo en P se tiene: $P = (24 - y)\cdot y^2$; que es una función en y: $P(y) = 24y^2 - y^3$.

El máximo de P se obtiene en las soluciones de $P'(y) = 0$ que hagan negativa a $P''(y)$.

Derivando dos veces:

$P'(y) = 48y - 3y^2$; $P''(y) = 48 - 6y$

La derivada primera se anula cuando $y = 0$ o $y = 16$.

Como $P''(0) = 48 > 0$ y $P''(16) = -48 < 0$, el valor máximo del producto se alcanza cuando $y = 16$.

Los números pedidos son $x = 8$ e $y = 16$.

Alcalá de Henares, 20 de marzo de 2018.