# EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

## ANÁLISIS (DERIVADAS)

**1**. Dada la función $f(x) = e^x(x-2)$:
a) (1 punto) Determina su dominio, los puntos de corte con los ejes y su asíntota.
b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) (0,3 puntos) Haz un esbozo de su gráfica.

**2**. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

**3**. (Castilla León, junio 2013)
(2 puntos) Entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, determina el que tiene área máxima.

**4**. (cf. Castilla–León, junio 2013)
(1,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + bx & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2\ln x & \text{si } 1 < x \end{cases}$. Halla *a* y *b* sabiendo que $f(x)$ es continua en $(0, \infty)$, y que la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{16}$ es paralela a la recta $y = -4x + 3$.

**5**. (La Rioja, junio 16)
(1,5 puntos) Calcula, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}$.

**6**. (1,2 puntos) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada por
$f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 5x + 6}$.

**7**. (Baleares, junio 15)
(1 punto) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

**Preguntas para subir nota**
**3**. (Castilla León, junio 2013)
(+1 punto) Entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, determina el que tiene área máxima.

**7**. (Baleares, junio 15)
(+0,5 puntos) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

**8**. (Aragón, junio 13)
(+0,5 puntos) Determina el valor que debe tomar *k* para que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right) = 1$.

Alcalá de Henares, 6 de abril de 2018.

## Soluciones

**1**. Dada la función $f(x) = e^x(x-2)$:

a) (1 punto) Determina su dominio, los puntos de corte con los ejes y su asíntota.
b) (1 punto) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
c) (0,3 puntos) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) La función está definida en todo el campo real; por tanto, no puede tener asíntotas verticales.

Corte con el eje *OY*: si $x = 0$, $f(0) = e^0(0-2) = -2 \to$ Punto (0, –2).

Corte con el eje *OX*: si $y = 0$, $0 = e^x(x-2) \Rightarrow x = 2 \to$ Punto (2, 0).

La función tiene una asíntota horizontal, hacía –∞, pues

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x-2) = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0.$$

La asíntota es la recta $y = 0$. Como se ha dicho, hacia –∞. (La curva va por debajo de la síntota).

→ No tiene asíntota oblicua, pues $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(x-2)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(x-2)+e^x}{1} = \infty$.

b) Derivando: $f´(x) = e^x(x-2) + e^x = e^x(x-1)$.

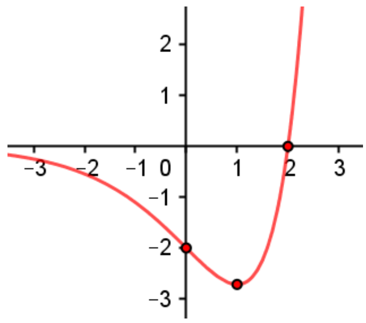
La derivada se anula en $x = 1$.

- Si $x < 1$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.

Para ese valor, $f(1) = -e$. El punto (1, –*e*) es un mínimo relativo de *f*.

c) Marcando los puntos (0, –2), (1, –e) y (2, 0), y teniendo la asíntota se puede trazar su gráfica.




**2**. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

La ecuación de dicha tangente será $y - f(1) = f´(1)\cdot(x-1)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \to f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0;\quad f´(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \to f´(1) = \frac{1-\ln 1}{1} = 1.$$

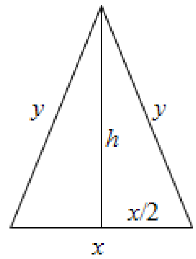
La recta tangente será: $y = x - 1$.

**3**. (Castilla León, junio 2013)

(2 puntos) Entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, determina el que tiene área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.




Su perímetro vale 6 $\Rightarrow\ x+2y=6 \Rightarrow\ y=\dfrac{6-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2=h^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow\ h=\sqrt{y^2-\dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y=\dfrac{6-x}{2} \Rightarrow\ h=\sqrt{\dfrac{36-12x+x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\sqrt{9-3x}$ .

El área del triángulo es $A=\dfrac{x\cdot h}{2}$ .

Sustituyendo $h$ por su valor, $A(x)=\dfrac{x\sqrt{9-3x}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{9x^2-3x^3}$ .

Para que el área $A$ sea máxima: $A'(x)=0$ y $A''(x)<0$ .

$$A'(x)=\frac{18x-9x^2}{4\sqrt{9x^2-3x^3}}=0 \Rightarrow 18x-9x^2=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, puede estudiarse el crecimiento y el decrecimiento de $A(x)$. Además, se descarta la solución $x = 0$, pues para ese valor se obtiene el área mínima, que es 0 m$^2$.

- Si $x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

En consecuencia, en $x = 2$ se da el máximo buscado, que es el triángulo equilátero de lado 2 m.

**4**. (cf. Castilla–León, junio 2013)

(1,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+bx & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 2\ln x & \text{si } 1<x \end{cases}$. Halla $a$ y $b$ sabiendo que $f(x)$ es continua en (0, ∞), y que la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{16}$ es paralela a la recta $y=-4x+3$.

Solución:

Por ser continua entre 0 e ∞, debe serlo en $x = 1$. Por tanto, en ese punto deben coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(a\sqrt{x}+bx\right)=a+b;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(c\ln x\right)=0$$

Como deben ser iguales $\Rightarrow a + b = 0$.

En $x=\dfrac{1}{16}$, la función que actúa es $f(x)=a\sqrt{x}+bx$.

Su derivada es $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}+b \Rightarrow\ f'(1/16)=\dfrac{a}{2\sqrt{1/16}}+b=2a+b$ .

Como la tangente en ese punto debe ser paralela a $y=-4x+3 \Rightarrow\ f'(1/16)=-4$ .

Por tanto: $2a+b=-4$ .

Se tiene el sistema $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow a = -4;\ b = 4.$

**5**. (La Rioja, junio 16)

(1,5 puntos) Calcula, si existe, $\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}$.

<u>Solución</u>:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = \left[1^{\infty}\right].$$

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+4x^2\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{2\sin x\cdot\cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{8\left(1+4x^2\right)-8x\cdot 8x}{\left(1+4x^2\right)^2}}{2\cos x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\sin x} = \frac{8}{2} = 4$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = e^4$.

$\to$ De otra forma:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = e^{\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2-1\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\sin^2 x}} = e^{\frac{0}{0}} = (L´H) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{8x}{2\sin x\cos x}} =$$

$$= (L´H) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{8}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}} = e^4.$$

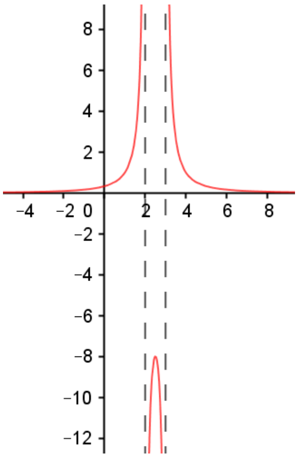
**6**. (1,2 puntos) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada por $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$.

<u>Solución</u>:

La función no está definida cuando $x^2-5x+6=0 \to x = 2$ o $x = 3$.

Por tanto: Dom($f$) = **R** – {2, 3}

Derivando: $f´(x) = \frac{-2\cdot(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2} \to$ Se anula en $x = 5/2$.




Con esto:

- Si $x < 2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $2 < x < 5/2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $5/2 < x < 3$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Por tanto, en $x = 5/2$ se da un máximo.
- Si $x > 3$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

(Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta).

**7**. (Baleares, junio 15)

(1 punto) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

Solución:

Si se considera la función $g(x) = e^x - x - 1$, que es continua y derivable, se observa que $g(0) = 0$; luego $x = 0$ es raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

Derivando:

$g´(x) = e^x - 1 \to e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ es candidato a máximo o mínimo.

- Si $x < 0$, $g´(x) < 0 \Rightarrow g$ es decreciente.
- Si $x > 0$, $g´(x) > 0 \Rightarrow g$ es creciente.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un mínimo absoluto. Como, además, $g(0) = 0$, la función $g(x) = e^x - x - 1$ sólo se anula en ese punto, lo que significa de $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

**Subir nota**

**8**. (Aragón, junio 13)

Determina el valor que debe tomar $k$ para que $\lim_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right) = 1$.

Solución:

Este límite se puede resolver multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada. Así:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right)}{\left(2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2 - \left(4x^2 + kx - 5\right)}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-kx + 5}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \text{(“dividiendo” por } x\text{)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-k + \frac{5}{x}}{2 + \sqrt{\frac{4x^2 + kx - 5}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-k + \frac{5}{x}}{2 + \sqrt{4x + \frac{k}{x} - \frac{5}{x^2}}} = \frac{-k}{4}.$$

Si se desea que el límite valga $1 \Rightarrow \frac{-k}{4} = 1 \Rightarrow k = -4$.

Alcalá de Henares, 6 de abril de 2018.