EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)
ANÁLISIS (DERIVADAS)

1. (MAJ16).

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x<0 \\ xe^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

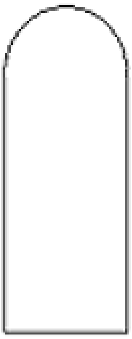
a) (1 punto) Estudia la continuidad de *f* y calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos) Calcula la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x = 2$.

2. (CMJ16).
a) (0,7 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano.
b) (0,6 puntos) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real.
c) (0,7 puntos) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

3. (CLJ16).
(1,5 puntos) Calcula *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto (1, 1) de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto.

4. (ARJ16).
(2 puntos) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).
Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determina las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.



5. (LRJ16).
(1,5 puntos) Calcula, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}$.

6. Dada la función $f(x)=(x-1)e^{x+1}$, halla:
a) (0,7 puntos) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
b) (0,8 puntos) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.

Alcalá de Henares, 3 de abril de 2017.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. ANÁLISIS (DERIVADAS) **Soluciones**

1. (MAJ16).

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x<0\\ xe^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudia la continuidad de f y calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos) Calcula la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x = 2$.

<u>Solución</u>:

a) Será continua cuando coincidan los límites laterales en $x = 0$, que es el único punto dudoso.

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\frac{0}{1}=0\ ;\quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} xe^{-x}=0\cdot1=0$$

Por tanto, es continua.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\to$ (Aplicando la regla de L´Hôpital) $\to \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{-1}=\dfrac{0}{-1}=0$.

b) La ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

$$y-f(2)=f´(2)\cdot(x-2)$$

Como $f(x)=xe^{-x}$ y $f(x)=e^{-x}-xe^{-x}$, se tendrá: $f(2)=2\cdot e^{-2}=\dfrac{2}{e^2}$ y $f´(2)=-e^{-2}=-\dfrac{1}{e^2}$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-\dfrac{2}{e^2}=-\dfrac{1}{e^2}\cdot(x-2)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$.

2. (CMJ16).

a) (0,7 puntos) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) (0,6 puntos) Razona que la ecuación $2e^x+x^5=0$ tiene al menos una solución real.

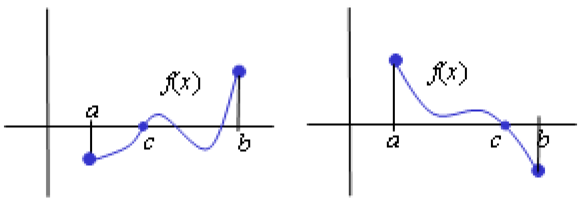
c) (0,7 puntos) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

<u>Solución</u>:

a) Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.

Geométricamente, esto significa que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a)>0$ y $f(b)<0$.)



Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene una solución (una raíz) entre a y b. Esa solución será el punto c cuya existencia afirma el teorema.

b) Si se considera la función $f(x)=2e^x+x^5$, que cumple las condiciones del teorema de Bolzano, como $f(-1)=2e^{-1}-1<0$ y $f(0)=2e^0>0$, se deduce que la función corta al eje OX en el intervalo

(–1, 0). Esto es, existe un valor $c \in$ (–1, 0) tal que $f(c)=0$; dicho valor es una solución de la ecuación $2e^x + x^5 = 0$.

c) Como $f'(x) = 2e^x + 5x^4$ siempre toma valores positivos, $\left(f'(x) > 0\right)$, se deduce que la función es siempre creciente. Por tanto, solo puede cortar una vez al eje *OX*; lo que significa que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ solo puede tener una solución.

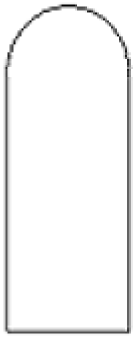
3. (CLJ16).
(1,5 puntos) Calcula *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto (1, 1) de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto.
Solución:
La función y sus dos primeras derivadas son:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

Por pasar por el punto (1, 1), $f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1$.
Por tener pendiente nula en (1, 1), $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$.
Si no tiene extremo relativo en (1, 1), pero $f'(1) = 0$, en ese punto debe darse una inflexión. Por tanto, $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$.
De $6 + 2a = 0 \Rightarrow a = –3$. Sustituyendo en las otras dos ecuaciones se tiene que *b* = 3 y *c* = 0.
Por tanto, la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

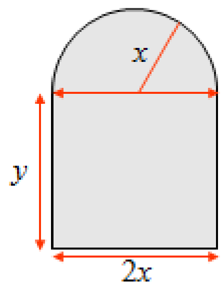
Nota: Para que el lector entienda mejor el resultado se adjunta la gráfica de esta función.

4. (ARJ16).
(2 puntos) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determina las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.
Solución:
Si el ancho de la ventana es 2*x* y la altura *y*, la suma de las áreas del semicírculo y del rectángulo será:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\pi x^2 + 2xy$$



El perímetro es la suma: ancho + altura de los lados + longitud del arco. Si vale 5 m $\Rightarrow 2x + 2y + \pi x = 5$
Despejando la incógnita *y* y sustituyendo en la función de área se tiene:

$$y = \frac{5 - 2x - \pi x}{2}.$$

Luego: $S(x) = \frac{\pi x^2}{2} + x\left(5 - 2x - \pi x\right) = \frac{10x - 4x^2 - \pi x^2}{2}$

El máximo de *S* se obtiene en la solución de *S´* = 0 que hace negativa a *S´´*.

$$S'(x) = \frac{10 - x\left(8 + 2\pi\right)}{2} = 0 \Rightarrow 5 - x\left(4 + \pi\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4 + \pi} \approx 0,7 \text{ m.}$$

Como $S''(x) = -\dfrac{8+2\pi}{2} < 0$, para ese valor de x se tiene el máximo buscado.
El ancho de la ventana será de $2x$ = 1,4 m;
la altura de las paredes laterales $y \approx \dfrac{5-2\cdot 0,7-\pi\cdot 0,7}{2} = 0,7$ m;
y su altura máxima será también de $y + x$ = 1,4 m.

5. (LRJ16).
(1,5 puntos) Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}$.
Solución:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = \left[1^\infty\right]$. Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+4x^2\right) = [\infty\cdot 0] =$$

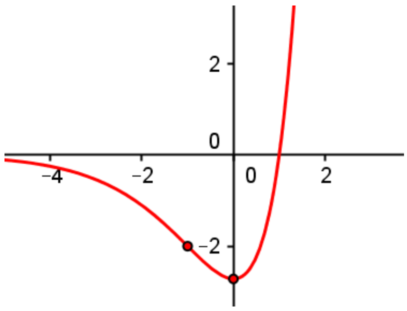
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8x}{1+4x^2}}{2\sin x\cdot\cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8\left(1+4x^2\right)-8x\cdot 8x}{\left(1+4x^2\right)^2}}{2\cos x\cdot\cos x - 2\sin x\cdot\sin x} = \frac{8}{2} = 4$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = e^4$.

6. Dada la función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, halla:
a) (0,7 puntos) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
b) (0,8 puntos) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.
Solución:
a) Derivada primera: $f'(x) = e^{x+1} + (x-1)e^{x+1} = xe^{x+1}$.
Esta derivada se anula en x = 0.
A la izquierda de x = 0, como $f'(x) < 0$, la función es decreciente. A su derecha, es creciente, pues $f'(x) > 0$.
Por tanto, en x = 0 hay un mínimo relativo, punto (0, –e).

b) Derivada segunda: $f''(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (x+1)e^{x+1}$.
Se anula en x = –1.
Para x < –1, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava (∩).
Para x > –1, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ e es convexa (∪).
Por tanto, en x = –1, como cambia de curvatura, la función tiene un punto de inflexión: punto (–1, –2).
(Aunque no se pide, se da su gráfica).



Alcalá de Henares, 3 de abril de 2017.