EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

Recuperación. ANÁLISIS (DERIVADAS)

1. (ARJ16).

(1,5 puntos) Determine: $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\ln(x^2)\right)\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$

2. (PAJ16).
(1,5 puntos) En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcule razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

3. (ICJ16).

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ (x-1)\ln^2(x) & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$.

a) (1,2 puntos) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$
b) (0,8 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3/4$.

4. (LRJ16). (4 puntos) Sea $g(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-4}$.

i) (0,6 puntos) Determine el dominio y la continuidad de *g*.
ii) (1,2 puntos) Halle las asíntotas de la gráfica de *g*.
iii) (1,5 puntos) Determine los extremos relativos y estudie la monotonía de *g*.
iv) (0,7 puntos) Dibuje la gráfica de *g* destacando los elementos hallados anteriormente.

<u>Elige una de las dos preguntas que siguen</u>:

5. (1 punto) Enuncia el teorema de Rolle. ¿Verifica la función $f(x)=x^2-2x+3$ el teorema de Rolle en el intervalo [–1, 3]? En caso afirmativo halla el punto que afirma el teorema.

6. (1 punto) Comprueba que la ecuación $x = x\sin x+\cos x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Justifica tu respuesta indicando la propiedad que se emplea.

Para subir nota

Ejercicio nº 2 de arriba. (Sube un máximo de 1 punto).
Ejercicio nº 3 de arriba. (Sube un máximo de 1 punto).
Ejercicio nº 4 de arriba. (Sube un máximo de 1,5 puntos).

7. (MAJ13) (1 punto) Dada la función $f(x)=2\cos^2 x$, se pide:

Determina los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Alcalá de Henares, 19 de abril de 2017.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. ANÁLISIS (DERIVADAS) **Soluciones**

1. (ARJ16).

(1,5 puntos) Determine: $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\ln(x^2)\right)\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\ln(x^2)\right)\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \text{(Aplicando L´Hôpital)} =$$

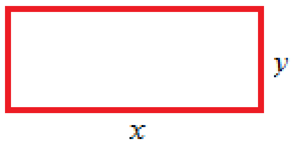
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)^2}{x^3+2x^2-3x} = 0 \to \text{el numerador tiene menor grado que el denominador.}$$

También puede reiterarse L´Hôpital dos veces más.

2. (PAJ16).

(1,5 puntos) En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcule razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

Solución:



Se pide construir un rectángulo de perímetro 2 m con superficie máxima.

Si x es la base e y la altura, se tiene que $2x + 2y = 2 \Rightarrow x + y = 1$.

Se desea que la superficie, $S = xy$, sea máxima.

Como $y = 1 - x$, sustituyendo en $S = xy \Rightarrow S = x(1-x) = x - x^2$.

El máximo de S se obtiene en la solución de $S´= 0$ que hace negativa a $S´´$.

Derivando:

$$S´ = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como $S´´ = -2 < 0$, para ese valor se obtiene el máximo buscado.

Se trata de un cuadrado de lado 0,5 m y superficie 0,25 m^2 = 25 dm^2.

El precio máximo que se puede obtener es de 25 €.

3. (ICJ16).

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ (x-1)\ln^2(x) & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$.

a) (1,2 puntos) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$

b) (0,8 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3/4$.

Solución:

a) Continuidad: deben coincidir los límites laterales en $x = 1$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(x - x^2\right) = 0; \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x-1)\ln^2(x) = 0\cdot0 = 0$$

Por tanto, es continua.

Derivabilidad: deben coincidir las derivadas laterales en $x = 1$.

Salvo en $x = 1$, $f´(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln^2(x) + 2(x-1)\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

Derivada por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f´(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-2x) = -1$;

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f´(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln^2(x) + 2(x-1)\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x}\right) = 0 + 0 = 0$.

Como no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

b) La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3/4$ es:

$$y - f\left(\frac{3}{4}\right) = f´\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

Como $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{3}{16}$ y $f´\left(\dfrac{3}{4}\right) = 1 - 2\cdot\dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2}$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{3}{16} = -\frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{16} \Leftrightarrow 8x + 16y - 9 = 0.$$

4. (LRJ16). (4 puntos) Sea $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4}$.

i) (0,6 puntos) Determine el dominio y la continuidad de *g*.
ii) (1,2 puntos) Halle las asíntotas de la gráfica de *g*.
iii) (1,5 puntos) Determine los extremos relativos y estudie la monotonía de *g*.
iv) (0,7 puntos) Dibuje la gráfica de *g* destacando los elementos hallados anteriormente.

<u>Solución</u>:

i) La función no está definida cuando $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por tanto, Dom(g) = **R** – {–2, 2} ⇒ En $x = -2$ y en $x = 2$ la función no es continua, por no estar definida.

ii) La función puede tener asíntotas verticales en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

En $x = -2$:

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ = (L´H) = $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2 + 4x}{2x} = \dfrac{4}{-4} = -1$ → En x = –2 no hay asíntota vertical. La discontinuidad en ese punto es evitable.

En $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 4} = \dfrac{16}{0} = \infty$ ⇒ La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

La función tiene también una asíntota oblicua: las funciones racionales tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador. Esta asíntota puede hallarse aplicando límites o dividiendo la expresión.

Mediante límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - 4x} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(g(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x}{x^2-4}\right) = 2 .$$

La asíntota es la recta $y = x + 2$.

Si se hace la división $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ se obtiene:

$$g(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-4} = x + 2 + \frac{4x+8}{x^2-4}$$

La ecuación de la asíntota es $y = x + 2$.

$$\begin{array}{rl|l} x^3 + 2x^2 & & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^3 \quad\;\; + 4x & & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2 + 4x & & \\ -2x^2 \quad\;\; + 8 & & \\ \cline{1-1} 4x+8 & & \end{array}$$

iii) Derivando:

$$g'(x) = \frac{\left(3x^2+4x\right)\left(x^2-4\right) - \left(x^3+2x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{x^4-12x^2-16x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Descomponiendo el numerador en factores se obtiene:

$$x^4 - 12x^2 - 16x = x\left(x^3-12x-16\right) = x(x+2)\left(x^2-2x-8\right) = x(x+2)(x+2)(x-4) .$$

Luego, la derivada se anula en los puntos $x = 0$ y $x = 4$. El punto $x = -2$ no puede considerarse, la función no está definida en él.

Podría escribirse que: $g'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ $\to$ simplemente se ha simplificado.

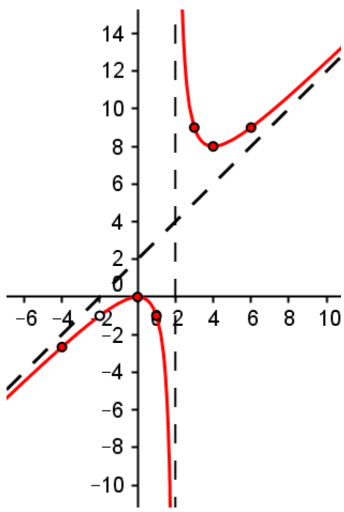
Para determinar el crecimiento y decrecimiento también hay que tener en cuenta que en los puntos $x = -2$ y $x = 2$ la función no está definida. Por tanto hay que estudiar el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$; $(2, 4)$; $(4, +\infty)$

- Si $x < -2$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.
- Si $-2 < x < 0$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.
- Si $0 < x < 2$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente.

Por tanto, en $x = 0$ hay un máximo relativo.

- Si $2 < x < 4$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente.
- Si $x > 4$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.

En consecuencia, en $x = 4$ hay un mínimo relativo.



iv) Para representar esta función, además de lo ya visto, puede estudiarse la posición de la curva respecto a las asíntotas, concluyendo que:

Si $x \to 2^-$, $g(x) \to -\infty$; y si $x \to 2^+$, $g(x) \to +\infty$.

Si $x \to -\infty$, $g(x) = x + 2 + \dfrac{4x+8}{x^2-4}$ va por debajo de la asíntota, pues el término $\dfrac{4x+8}{x^2-4}$ es negativo.

Sucede al revés cuando $x \to +\infty$.

Pueden darse algunos valores:

(0, 0), máximo; (–4, –8/3); el punto (–2, –1) debe dejarse en blanco: $g(x)$ no está definida; (1, –1); (3, 9); (4, 8), mínimo; (6, 9).

Elige una de las dos preguntas que siguen:

5. (1 punto) Enuncia el teorema de Rolle. ¿Verifica la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ el teorema de Rolle en el intervalo [–1, 3]? En caso afirmativo halla el punto que afirma el teorema.

Solución:

Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado; además, $f(-1) = 6$ y $f(3) = 6$.

Por tanto, verifica el teorema de Rolle y, en consecuencia, existe un punto $c \in (-1, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

Efectivamente, derivando $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Esto es, $c = 1$.

Observación: Como la función dada es una parábola, la abscisa hallada es la del vértice.

6. (1 punto) Comprueba que la ecuación $x = x\sin x + \cos x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Justifica tu respuesta indicando la propiedad que se emplea.

Solución:

La función $f(x) = x\sin x + \cos x - x$ es continua en $[-\pi, \pi]$.

Además: $f(-\pi) = -1 + \pi > 0$ y $f(\pi) = -1 - \pi < 0$

Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano se deduce que existe un punto $c \in (-\pi, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

Ese valor de c será la raíz de la ecuación $x = x\sin x + \cos x$, pues cumple que $f(c) = c\sin c + \cos c - c = 0 \Leftrightarrow c = c\sin c + \cos c$.

Para subir nota

7. (MAJ13) (1 punto) Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

Determina los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) Derivando:

$$f(x) = 2\cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) = -2\sin(2x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2\sin(2x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi/2,\ x = -\pi/2.$$

Derivando otra vez: $f''(x) = -4\cos(2x)$.

Como $f''(0) = -4\cos 0 = -4 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da un máximo de la función.

Como $f(x) = 2\cos^2 x \geq 0$ para todo x, y se cumple que $f(\pi/2) = 2\cos^2(\pi/2) = 0$, y lo mismo para $-\pi/2$, en esos dos puntos la función tiene sendos mínimos.

Alcalá de Henares, 19 de abril de 2017.