EXAMEN DE MATEMÁTICAS (2º DE BACHILLERATO)

ANÁLISIS (DERIVADAS)

1. (ARJ15) (1 punto) Calcula: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

2. (IBJ15) (1,5 puntos) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

3. (MAJ15) (1,5 punto) Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$, calcula la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

4. (1,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a a para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

5. (ARJ12) (1,5 puntos) Descompón el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

6. (CLJ15) (3 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas (1,5 puntos), intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos (1 punto). Esbozar su gráfica. (0,5 puntos)

Alcalá de Henares, 25 de abril de 2016.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. ANÁLISIS (DERIVADAS) **Soluciones**

1. (ARJ15) (1 punto) Calcula: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right]$$ → Forma indeterminada: puede resolverse operando y aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}$$

2. (IBJ15) (1,5 puntos) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x=1+x$.

Solución:

Si se considera la función $g(x)=e^x-x-1$, que es continua y derivable, se observa $g(0)=0$; luego $x = 0$ es raíz de la ecuación $e^x=1+x$.

Derivando:

$g´(x)=e^x-1 \to e^x-1=0 \Rightarrow x=0$ es candidato a máximo o mínimo.

- Si $x < 0$, $g´(x)<0 \Rightarrow g$ es decreciente.
- Si $x > 0$, $g´(x)>0 \Rightarrow g$ es creciente.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un mínimo absoluto. Como, además, $g(0)=0$, la función $g(x)=e^x-x-1$ solo se anula en ese punto, lo que significa de $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x=1+x$.

3. (MAJ15) (1,5 punto) Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$, calcula la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x = 0$.

Solución:

Derivando:

$$f´(x)=\frac{x^2-4-x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-4}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\Rightarrow f´(0)=\frac{3}{4}$$

Como $f(0)=\frac{0}{-4}+\frac{\ln 1}{1}=0$, la recta tangente en $x = 0$ es:

$$y-f(0)=f´(0)\cdot x \Rightarrow y=\frac{3}{4}x$$

4. (1,5 puntos) ¿Qué valor hay que asignar a a para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en x = 0?

Solución:

Los límites laterales coinciden con $f(0)$ = 1, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^{0^-}=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1$$

Por tanto, la función es continua en x = 0.

Salvo en x = 0, su derivada es $f'(x)=\begin{cases} ae^{ax}, & \text{si } x<0 \\ 2, & \text{si } x>0 \end{cases}$

Las derivadas laterales en x = 0 valen:

$f'(0^-)=a$ y $f'(0^+)=2$ ⇒ La función es derivable si a = 2.

5. (ARJ12) (1,5 puntos) Descompón el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución:

Sean x e y los números buscados.

Se desea que el producto $P=x\cdot y^2$ sea máximo.

Como se cumple que $x+y=12 \Rightarrow x=12-y$.

Sustituyendo en P se tiene: $P=(12-y)\cdot y^2$; que es una función en y:

$P(y)=12y^2-y^3$.

El máximo de P se obtiene en las soluciones de $P'(y)=0$ que hagan negativa a $P''(y)$.

Derivando dos veces:

$P'(y)=24y-3y^2$; $P''(y)=24-6y$

La derivada primera se anula cuando y = 0 o y = 8.

Como $P''(0)=24>0$ y $P''(8)=-24<0$, el valor máximo del producto se alcanza cuando y = 8.

Los números pedidos son x = 4 e y = 8.

6. (CLJ15) (3 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas (1,5 puntos), intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos (1 punto). Esbozar su gráfica. (0,5 puntos)

Solución:

La función está definida cuando lo está $\ln x$: por tanto, cuando x > 0. Dom(f) = (0, +∞) – {1}, pues en x = 1 se anula el denominador.

¿Asíntota vertical?

Puede darse cuando se anula el denominador, en x = 1.

En efecto, como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$, la recta $x=1$ es asíntota vertical de la curva.

Puede verse que:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$ → Por la izquierda, cuando $x\to 1^-$, la curva tiende a –∞.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$ → Por la derecha, cuando $x \to 1^+$, la curva tiende a +∞.

¿Asíntota horizontal?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \infty$$ → No tiene asíntota horizontal.

¿Asíntota oblicua?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$ → Tampoco tiene asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

La derivada se anula cuando $\ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$.

Con esto:

- Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $1 < x < e$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x > e$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Por tanto, en $x = e$ se da un mínimo relativo.

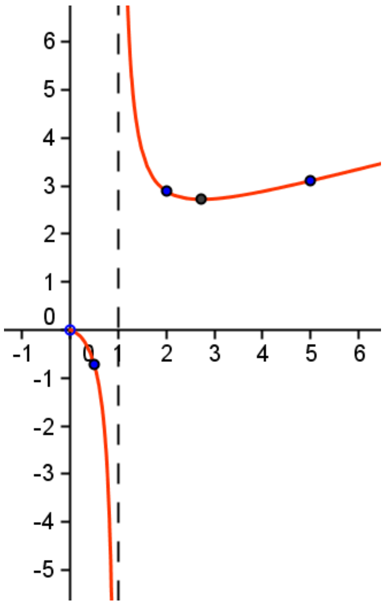
Para hacer un esbozo de su gráfica conviene dar algunos valores:

$$f(0,5) = \frac{0,5}{\ln 0,5} \approx -0,72; \quad f(2) = \frac{2}{\ln 2} \approx 2,89;$$

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} \approx 2,72 \text{ (mínimo)}; \quad f(5) = \frac{5}{\ln 5} \approx 3,11$$

También puede observarse que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0^-$.

Su gráfica es la adjunta.



Alcalá de Henares, 25 de abril de 2016.