EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

Recuperación

1. (Andalucía, junio 2012) De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$.

a) (1,2 punto) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

b) (0,8 puntos) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) (0,5 puntos) Calcula el vértice *D*.

2. (Cataluña, junio 2012) Dados el plano $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$.

a) (1 punto) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.

b) (1,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta *s* que está contenida en el plano π, es perpendicular a la recta *r* y corta la recta *r*.

3. (Madrid, junio 2012) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Halla los valores de *a* para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

b) (1 punto) Halla la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

(Nota: Ese plano se llama mediador y pasa por el punto medio del segmento que determinan los puntos dados).

4. a) (0,5 puntos) Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 5)$ y es perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$.

b) (0,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(1, -1, 7)$ y es paralelo al plano $\pi : 3x + 5y - z + 2 = 0$.

5. (0,8 puntos) Halla el simétrico del punto $P(1, -1, 0)$ respecto del plano $\pi : 3x + y - 2z + 7 = 0$.

6. (0,7 puntos) Halla la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

Alcalá de Henares, 26 de febrero de 2019.

Soluciones:

1. (Andalucía, junio 2012) De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: *A*(2, –1, 0), *B*(–2, 1, 0) y *C*(0, 1, 2).

a) (1,2 punto) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

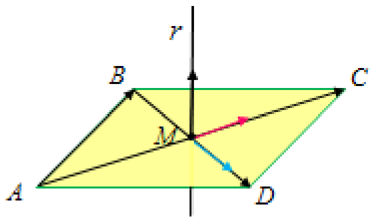
b) (0,8 puntos) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) (0,5 puntos) Calcula el vértice *D*.

Solución:

a) El centro del paralelogramo es el punto de corte de sus diagonales; coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo la diagonal *AC*.

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1).$$



Un vector director de la recta, es el normal del plano que contiene al paralelogramo, que es ***AB*** × ***AC***.

AB = (–2, 1, 0) – (2, –1, 0) = (–4, 2, 0);

AC = ***BC*** = (0, 1, 2) – (−2, 1, 0) = (2, 0, 2).

Como $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4,\ 8,\ -4) \approx (1, 2, -1)$, la recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Nota: También se podría calcular el plano determinado por los puntos *A*, *B* y *C*. Su vector normal es el de dirección de la recta pedida.

b) El área del paralelogramo = $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|$.

AB = (–2, 1, 0) – (2, –1, 0) = (–4, 2, 0); ***AD*** = ***BC*** = (0, 1, 2) – (−2, 1, 0) = (2, 0, 2).

Por tanto: $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4,\ 8,\ -4) \to$ Área $= \sqrt{16+64+16} = 4\sqrt{6}$ u^2.

c) Vértice *D*:

OD = ***OA*** + ***AD*** = ***OA*** + ***BC*** = (2, –1, 0) + (0, 1, 2) – (−2, 1, 0) = (4, −1, 2).

De otra forma:

Si *D* = (*a*, *b*, *c*), como ***AB*** = ***DC*** ⇒ (–4, 2, 0) = (–*a*, 1 – *b*, 2 – *c*) → *D* = (4, −1, 2).

2. (Cataluña, junio 2012) Dados el plano $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}$.

a) (1 punto) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.

b) (1,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta *s* que está contenida en el plano π y corta perpendicularmente a la recta *r*.

Solución:

a) El punto de corte es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \\ x-y+2z=5 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=0 \\ -3y-z=10 \\ -2y+z=5 \end{cases} \to E3+E2: -5y = 15 \to y = -3;\ z = -1,\ x = 4.$$

Punto *P*(4, −3, −1).

b) Ecuaciones paramétricas de r.

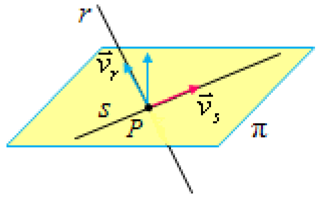
$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x+y=-z \\ 2x-y=10-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y=-z \\ 3x=10-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r=(-2,\ -1,\ 3).$$

Otras formas de la ecuación de la recta: $r\equiv\begin{cases} x=10+2t \\ y=-t \\ z=-10-3t \end{cases}$; $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=5-\dfrac{3}{2}\lambda \end{cases}$.

El vector de dirección de la recta pedida, que debe ser perpendicular $\vec{v}_r$ y a $\vec{v}_\pi=(1,\ -1,\ 2)$, viene dado por el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\vec{v}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(1,\ 7,\ 3)\to s\equiv\begin{cases} x=4+t \\ y=-3+7t \\ z=-1+3t \end{cases}.$$



3. (Madrid, junio 2012) Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:
a) (1,5 puntos) Halla los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
b) (1 punto) Halla la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.
(Nota: Ese plano se llama mediador y pasa por el punto medio del segmento que determinan los puntos dados).
Solución:
a) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores $\mathbf{P_1P_2}$, $\mathbf{P_1P_3}$ y $\mathbf{P_1P_4}$, que son:

$\mathbf{P_1P_2}=(a,2,0)-(1,3,-1)=(a-1,-1,1)$; $\mathbf{P_1P_3}=(1,5,4)-(1,3,-1)=(0,2,5)$
$\mathbf{P_1P_4}=(2,0,2)-(1,3,-1)=(1,-3,3)$.

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|21a-21-7|=\frac{1}{6}|21a-28|=7\ \text{u}^3.$$

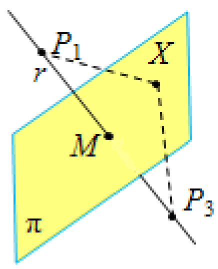
Hay dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a-28)=7\Rightarrow a=\frac{70}{21}=\frac{10}{3};\ \text{o bien,}\Rightarrow\frac{1}{6}(-21a+28)=7\Rightarrow a=-\frac{14}{21}=-\frac{2}{3}.$$

b) Se trata del plano mediador: pasa por el punto medio del segmento P_1P_3 y es perpendicular al vector $\mathbf{P_1P_3}$.

Como $\mathbf{P_1P_3}=(0,2,5)$ y el punto $M=\left(\dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{3+5}{2},\ \dfrac{-1+4}{2}\right)=(1,4,3/2)$, el plano pedido será:

$\pi: 2y+5z+d=0\to 8+15/2+d=0\Rightarrow d=-31/2\Rightarrow$



$\Rightarrow \pi: 4y + 10z - 31 = 0$.

De otra forma:
Si $X = (x, y, z)$ es un punto genérico de ese plano, como $d(X, P_1) = d(X, P_3)$, debe cumplirse que:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2} \to \pi: 4y + 10z - 31 = 0.$$

4. a) (0,5 puntos) Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 5)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$.

b) (0,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(1, -1, 7)$ y es paralelo al plano $\pi: 3x + 5y - z + 2 = 0$.

Solución:
a) El plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$\pi: 3(x - x_0) + (y - y_0) - 2(z - z_0) = 0 \to$ Su vector característico $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

Para $P(1, -3, 5)$ el plano es:

$\pi: 3(x-1) + (y+3) - 2(z-5) = 0 \Leftrightarrow \pi: 3x + y - 2z + 10 = 0$

b) Los vectores característicos de dos planos paralelos son iguales (proporcionales). Por tanto, el plano pedido será:

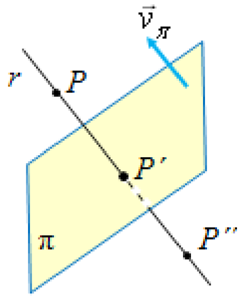
$\pi': 3x + 5y - z + d = 0 \to$ el valor de d se obtiene sustituyendo P en π'.

$\pi': 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) - 7 + d = 0 \Rightarrow d = 9$.

El plano pedido es: $\pi': 3x + 5y - z + 9 = 0$.

5. (0,8 puntos) Halla el simétrico del punto $P(1, -1, 0)$ respecto del plano $\pi: 3x + y - 2z + 7 = 0$.

Solución:



1) Se halla la recta perpendicular π que contiene a $P \to r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$.

2) Se halla el corte entre r y π.

$\pi: 3(1 + 3t) + (-1 + t) - 2(-2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = -9/14$.

Por tanto, el punto $P' = \left(-\frac{13}{14}, -\frac{23}{14}, \frac{18}{14}\right)$.

3) El punto P' será el punto medio entre $P(1, -1, 0)$ y su simétrico P''.
Si $P'' = (x_0, y_0, z_0)$, el punto medio entre P y P'' será:

$$P' = \left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{-1 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) = \left(-\frac{13}{14}, -\frac{23}{14}, \frac{18}{14}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{13}{14} = \frac{1 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{20}{7};\ -\frac{23}{14} = \frac{-1 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{16}{7};\ \frac{18}{14} = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{18}{7}.$$

Por tanto, $P''\left(-\frac{20}{7}, -\frac{16}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

6. (0,8 puntos) Halla la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

<u>Solución</u>:
Hay que determinar la relación "lineal" de los vectores de dirección de las rectas dadas ($\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$) y ***RS***, siendo *R* y *S* puntos de *r* y *s*, respectivamente. Si esos vectores son linealmente independientes las rectas se cruzan; en caso contrario, se cortan. (El paralelismo es evidente, pues en este caso $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ serían proporcionales).
Esos vectores son:
$\vec{v}_r$ = (2, 1, 2), $\vec{v}_s$ = (2, 3, 1) y ***RS*** = (0, 1, 0) – (0, 0, 1) = (0, 1, –1),
donde *R* = (0, 0, 1) es un punto de *r* y *S* = (0, 1, 0) un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8+6 = -2 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

Alcalá de Henares, 26 de febrero de 2019.