EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

1. (EvAU Murcia, junio 18)
Considere el punto *P* = (0, 1, 2) y la recta *r* dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}.$$

a) (1,5 puntos) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta *r* y pasa por el punto *P*.
b) (0,5 puntos) Calcule la distancia del punto *P* al plano $x+y+z=5$.

2. (EvAU Comunidad Valenciana, junio 18)
a) (1,5 puntos) Dados el punto *A*(5, 7, 3) y la recta $r:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$, halla la recta *s* que corta a la recta *r*, pasa por el punto *A*, y es perpendicular a la recta *r*.
b) (1 punto) El punto *A´*, simétrico de *A* respecto de *r*.

3. a) (Madrid, junio 18) (1,25 puntos)
Dados el punto *P*(1, 1, 1) y la recta $r\equiv\begin{cases}2x+y=2\\ 5x+z=6\end{cases}$, halla la distancia del punto *P* a la recta *r*.
b) (La Rioja, junio 18) (0,75 puntos)
Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (–1, 4, 8) y $\vec{v}$ = (1, 2, –2).
c) (Galicia, junio 18) (1 punto)
Dado el plano $\pi: 2x-y-2z-3=0$, calcula el valor de *a* para que la recta *r* que pasa por los puntos *P*(*a*, *a*, *a*) y *Q*(1, 3, 0) sea paralela al plano π.

4. (EvAU Navarra, junio 18)
(2,5 puntos) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto *P* ≡ (–4, 0, 5) y corta a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\ x+y+1=0\end{cases}\ \text{y}\ s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}.$$

Alcalá de Henares, 29 de enero de 2019

Soluciones

---

1. (EvAU Murcia, junio 18)

Considere el punto *P* = (0, 1, 2) y la recta *r* dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}.$$

a) (1,5 puntos) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta *r* y pasa por el punto *P*.

b) (0,5 puntos) Calcule la distancia del punto *P* al plano $x+y+z=5$.

<u>Solución</u>:

a) El vector característico del plano es el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi=\vec{v}_r$.

Para determinar $\vec{v}_r$ se expresa la recta en sus ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}\Rightarrow r:\underset{E2+E1}{}\begin{cases}2x+y-z=-1\\ 3x=2\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}4/3+y-z=-1\\ \uparrow x=2/3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ r:\begin{cases}x=2/3\\ y=-7/3+\lambda\\ z=\quad\lambda\end{cases}\Rightarrow \vec{v}_r=(0,1,1).$$

Como el plano debe contener al punto *P* = (0, 1, 2), su ecuación será:

$$\pi\equiv 1\cdot(y-1)+1\cdot(z-2)=0\ \Rightarrow\ \pi\equiv y+z-3=0.$$

b) La distancia del punto *P*(0, 1, 2) al plano $x+y+z=5$ viene dada por:

$$d\left(P(0,1,2),\pi:x+y+z-5=0\right)=\left|\frac{0+1+2-5}{\sqrt{1+1+1}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{u.}$$

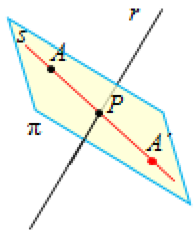
2. (EvAU Comunidad Valenciana, junio 18)

a) (1,5 puntos) Dados el punto *A*(5, 7, 3) y la recta $r:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$, halla la recta *s* que corta a la recta *r*, pasa por el punto *A*, y es perpendicular a la recta *r*.

b) (1 punto) El punto *A´*, simétrico de *A* respecto de *r*.

<u>Solución</u>:

a) La recta *s* viene determinada por el punto *A* y por el punto de corte (de *r*) con el plano π, perpendicular a *r* que pasa por *A*.



Como $r:\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+3t\\ z=2t\end{cases}$, el plano π está determinado por el vector $\vec{v}_r$ = (−1, 3, 2) y por el punto *A*(5, 7, 3):

$$\pi:-(x-5)+3(y-7)+2(z-3)=0\Rightarrow \pi:x-3y-2z+22=0.$$

Corte de π con *r*:

$$3-t-3(-1+3t)-2(2t)+22=0\ \Rightarrow\ -14t+28=0\Rightarrow t=2\ \Rightarrow\ P(1,5,4).$$

Como el vector $\overrightarrow{AP}=(1,5,4)-(5,7,3)=(-4,-2,1)$, la recta *s* es: $s:\begin{cases}x=5-4t\\ y=7-2t\\ z=3+t\end{cases}$.

b) Si A' es el simétrico de A respecto la recta $\Rightarrow$ $P(1,5,4)$ es el punto medio entre A y A'.

Luego, si $A' = (a, b, c)$, el punto medio entre A y A' es: $M = \left(\frac{5+a}{2}, \frac{7+b}{2}, \frac{3+c}{2}\right)$.

Igualando las coordenadas de P y M se tiene:

$\frac{5+a}{2} = 1 \Rightarrow a = -3$; $\quad \frac{7+b}{2} = 5 \Rightarrow b = 3$; $\quad \frac{3+c}{2} = 4 \Rightarrow c = 5$.

El punto el punto simétrico de A respecto de r es: $A' = (-3, 3, 5)$.

3. a) (Madrid, junio 18) (1,25 puntos) Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, halla la distancia del punto P a la recta r.

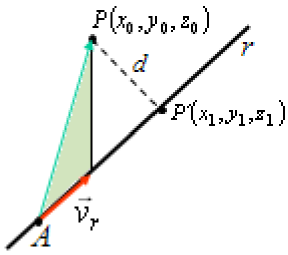
b) (La Rioja, junio 18) (0,75 puntos) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (-1, 4, 8)$ y $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

c) (Galicia, junio 18) (1 punto) Dado el plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π.

Solución:

a) Se escribe la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$ en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2-2t \\ z = 6-5t \end{cases}$.

La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:



$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$, siendo $A \in r$.

En este caso:

$A = (0, 2, 6)$, $P = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -5)$, $\vec{v}_r = (1, -2, -5)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5,\ 0,\ -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

Luego $d(P,r) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}$.

b) El coseno del ángulo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-1,\ 4,\ 8) \cdot (1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{-1+8-16}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3}.$$

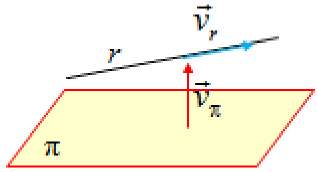
Por tanto, $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109,47^{\circ}$.

c) El vector de dirección de la recta r es $\overline{QP}$ = (a, a, a) – (1, 3, 0) = (a – 1, a –3, a).

La recta será paralela al plano π si el vector característico de π, $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, –2), es perpendicular a $\overline{QP}$.

Luego $\overline{QP} \cdot \vec{v}_\pi = 0$:

(a – 1, a –3, a) · (2, –1, –2) = 0 $\Rightarrow 2a-2-a+3-2a=0 \Rightarrow a=1$.



4. (EvAU Navarra, junio 18)

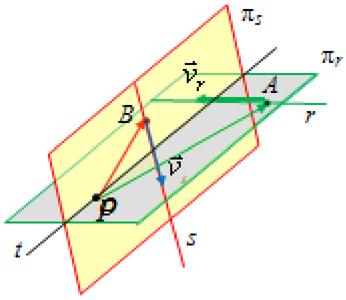
(2,5 puntos) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 0, 5)$ y corta a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}.$$

<u>Solución</u>:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_r, que pasa por P y contiene a r, y π_s, que pasa por P y contiene a s.

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:



$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \equiv^{E1-E2} \begin{cases} z-2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y=\quad t \\ z=2 \end{cases}.$$

Luego: $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 0) y $A \in r$, A(–1, 0, 2).

$$s \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+2h \\ y=3+h \\ z=h \end{cases} \to \vec{v}_s = (2, 1, 1) \text{ y } B \in s,\ B(2, 3, 0).$$

El plano π_r viene dado por P, $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{AP}$ = (–4, 0, 5) – (–1, 0, 2) = (–3, 0, 3).

Su ecuación es:

$$\pi_r \equiv \begin{vmatrix} x+4 & -1 & -3 \\ y & 1 & 0 \\ z-5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r \equiv 3(x+4)+3y+3(z-5)=0 \Rightarrow \pi_r \equiv x+y+z-1=0.$$

El plano π_s viene dado por P, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{BP}$ = (–4, 0, 5) – (2, 3, 0) = (–6, –3, 5).

Su ecuación es:

$$\pi_s \equiv \begin{vmatrix} x+4 & 2 & -6 \\ y & 1 & -3 \\ z-5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s \equiv 8(x+4)-16y=0 \Rightarrow \pi_s \equiv x-2y+4=0.$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$p \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow p \equiv \begin{cases} x=-4+2\lambda \\ y=\quad \lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow p \equiv \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}.$$

Alcalá de Henares, 29 de enero de 2019