EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

Recuperación

1. (EvAU Madrid, junio 17)
Dados los puntos $P(1, –2, 1)$, $Q(–4, 0, 1)$, $R(–3, 1, 2)$, $S(0, –3, 0)$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación (general) del plano que contiene a *P*, *Q* y *R*.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta *r*, que pasa por los puntos *P* y *Q*, y la recta *s*, que pasa por *R* y *S*.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos *P*, *Q* y *R*.

2. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$, $\quad s \equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.
a) (1,5 puntos) Comprueba que se cortan perpendicularmente. Encuentra el punto de corte.
b) (0,75 puntos) Halla la ecuación del plano que las contiene.
c) (0,75 puntos) Halla la recta perpendicular común a *r* y *s*.

3. (Selectividad Madrid, junio 2012)
Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
a) (1,5 puntos) Hallar los valores de *a* para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

4. (1 punto) Dado el plano $\pi: 2x+y-2z=3$, halla la ecuación de los planos paralelos a π y que disten 4 unidades de π.

Preguntas para subir nota (Se podrá subir un máximo de 2 puntos)

3. Pregunta 3 del examen de recuperación.

5. (Selectividad Cataluña, junio 2012)
Dados el plano $\pi: x-y+2z-5=0$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}$.
Calcula la ecuación de la recta *s* que está contenida en el plano π, es perpendicular a la recta *r* y corta la recta *r*.

Alcalá de Henares, 27 de febrero de 2018

Soluciones

1. (EvAU Madrid, junio 17)
Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación (general) del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.
Solución:
a) El plano que contiene a P, Q y R viene dado por el punto $P(1, -2, 1)$ y por los vectores:
PQ = (–4, 0, 1) – (1, –2, 1) = (–5, 2, 0) y **PR** = (–3, 1, 2) – (1, –2, 1) = (–4, 3, 1) →

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & -5 & -4 \\ y+2 & 2 & 3 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2(x-1)+5(y+2)-7(z-1)=0 \Rightarrow \pi: 2x+5y-7z+15=0.$$

b) La recta r está determinada por P y **PQ**. Su ecuación es $r: \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = -2+2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

La recta s está determinada por R y **SR** = (–3, 1, 2) – (0, –3, 0) = (–3, 4, 2) → $s: \begin{cases} x = -3-3t \\ y = 1+4t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

Puede observarse que las rectas no son paralelas, pues $\vec{v}_r = (-5, 2, 0)$ y $\vec{v}_s = (-3, 4, 2)$ son independientes (no paralelos).
Para ver si se cruzan o se cortan hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores **PQ** = $\vec{v}_r$, **SR** = $\vec{v}_s$ y **PR** = (–4, 3, 1).

Como $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10-10=0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes: las rectas se cortan.

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R viene dada por $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$.

Como:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2, \ 5, \ -7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{4+25+49} = \sqrt{78}.$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \dfrac{\sqrt{78}}{2}$ u^2.

2. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$, $\quad s \equiv x-1 = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.
a) (1,5 puntos) Comprueba que se cortan perpendicularmente. Encuentra el punto de corte.
b) (0,75 puntos) Halla la ecuación del plano que las contiene.

c) (0,75 puntos) Halla la recta perpendicular común a r y s.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

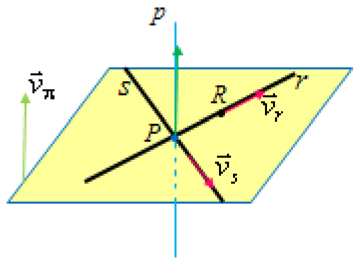
$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7-2y \\ y = y \\ z = 2-y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7-4t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, 2, -1).$$

$$s \equiv x-1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1+h \\ y = 3h \\ z = -1+2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3, 2).$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son perpendiculares, ya que

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-4, 2, -1) \cdot (1, 3, 2) = -4 + 6 - 2 = 0.$$

Por tanto, las rectas son perpendiculares.



Para comprobar que se cortan basta con ver que el sistema que determinan tiene solución. Este sistema es:

$$\begin{cases} 7-4t = 1+h \\ 2t = 3h \\ 2-t = -1+2h \end{cases}, \text{ cuya solución es } t = \frac{9}{7} \text{ y } h = \frac{6}{7}.$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo $t = \frac{9}{7}$ en r o $h = \frac{6}{7}$ en $s \to P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

b) El plano pedido queda determinado, por ejemplo, por $R(7, 0, 2) \in r$ y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-7 & -4 & 1 \\ y & 2 & 3 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi:\ 7(x-7)+7y-14(z-2)=0 \Rightarrow \pi:\ x+y-2z-3=0.$$

c) La perpendicular común es la que pasa por P y lleva la dirección del vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, 1, -2)$.

Su ecuación es: $p \equiv \begin{cases} x = 13/3+\lambda \\ y = 18/7+\lambda \\ z = 5/7-2\lambda \end{cases}$.

3. (Selectividad Madrid, junio 2012)

Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores $\boldsymbol{P_1P_2}$, $\boldsymbol{P_1P_3}$ y $\boldsymbol{P_1P_4}$, que son:

$\boldsymbol{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a-1, 1, 1)$; $\boldsymbol{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5)$

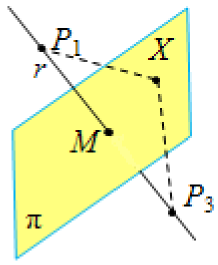
$\boldsymbol{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3)$.

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|21a-21-7\right|=\frac{1}{6}\left|21a-28\right|=7$$

Dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a-28)=7 \Rightarrow a=\frac{70}{21}=\frac{10}{3}\text{; o bien, } \Rightarrow \frac{1}{6}(-21a+28)=7 \Rightarrow a=-\frac{14}{21}=-\frac{2}{3}$$

b) (1 punto) Se trata del plano mediador: pasa por el punto medio del segmento P_1P_3 y es perpendicular al vector $\boldsymbol{P_1P_3}$.



Como $\boldsymbol{P_1P_3}$ = (0, 2, 5) y el punto $M=\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{3+5}{2},\ \frac{-1+4}{2}\right)$ = (1, 4, 3/2), el plano pedido será:

$\pi: 2y+5z+d=0 \to 8 + 15/2 + d = 0 \Rightarrow d = -31/2 \Rightarrow \pi: 4y+10z-31=0$

<u>De otra forma</u>:

Si $X = (x, y, z)$ es un punto genérico de ese plano, como $d(X, P_1) = d(X, P_3)$, debe cumplirse que:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2} \to \pi: 4y+10z-31=0.$$

4. (1 punto) Dado el plano $\pi: 2x+y-2z=3$, halla la ecuación de los planos paralelos a π y que disten 4 unidades de π.

<u>Solución:</u>

Si el punto $P(x,y,z)$ es un punto de los planos pedidos debe cumplir que:

$$d(P,\pi)=4 \Rightarrow \left|\frac{2x+y-2z-3}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\right|=4 \Rightarrow \frac{2x+y-2z-3}{\pm 3}=4 \Rightarrow \begin{cases}\pi_1: 2x+y-2z=15\\ \pi_2: 2x+y-2z=-9\end{cases}.$$

Para subir nota

5. (Selectividad Cataluña, junio 2012)

Dados el plano $\pi: x-y+2z-5=0$ y la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0\\ 2x-y+z=10\end{cases}$.

Calcula la ecuación de la recta s que está contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a la recta r.

<u>Solución</u>:

1) Se halla el punto de corte de la recta y el plano. Es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ 2x-y+z=10\\ x-y+2z=5\end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2-2E1\\ E3-E1\end{matrix} \begin{cases} x+y+z=0\\ -3y-z=10\\ -2y+z=5\end{cases} \to E3+E2: -5y=15 \to y=-3;\ z=-1,\ x=4.$$

Punto $P(4, -3, -1)$.

2) Se expresa la recta r en paramétricas.

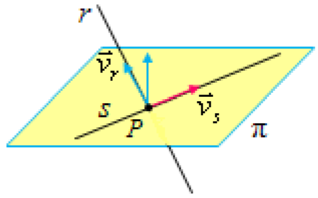
$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x+y=-z \\ 2x-y=10-z \end{cases} \Rightarrow r: \underset{E2+E1}{} \begin{cases} x+y=-z \\ 3x=10-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r=(-2,\ -1,\ 3).$$

<u>Otras formas</u> de la ecuación de la recta: $r \equiv \begin{cases} x=10+2t \\ y=-t \\ z=-10-3t \end{cases}$; $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=5-\dfrac{3}{2}\lambda \end{cases}$.

El vector de dirección de la recta pedida, que debe ser perpendicular $\vec{v}_r$ y a $\vec{v}_\pi=(1,\ -1,\ 2)$, viene dado por el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\vec{v}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(1,\ 7,\ 3) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=-3+7t \\ z=-1+3t \end{cases}$$



Alcalá de Henares, 27 de febrero de 2018