EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

Recuperación

1. (Castilla y León, junio 16).
a) (1 punto) Calcula un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v}$ = (2, 1, –2).
b) (1,5 puntos) Calcula un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto *A* = (–1, 2, 0) sea mínima.

2. (Comunidad Valenciana, junio 16)
Se dan las rectas $r: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) (1 punto) La recta paralela a *r* que pasa por el punto (0, 1, 0).
b) (1 punto) El plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a *s*. (Da su ecuación general).
c) (1 punto) La distancia entre las rectas *r* y *s*.

3. (Andalucía, junio 15).
Sean los puntos *A*(0, 1, 1), *B*(2, 1, 3), *C*(–1, 2, 0) y *D*(2, 1, *m*).
a) (1 punto) Calcula *m* para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en el mismo plano.
b) (1 punto) Determina la ecuación del plano respecto del cual *A* y *B* son simétricos.
c) (1 punto) Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

4. (Madrid, junio 15).
(1,5 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

Hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

Para subir nota

1. Ejercicio nº 4 de arriba. (Sube un máximo de 1 punto).

2. (Castilla y León, junio 15). (Sube un máximo de 1,5 puntos)
a) Calcula la recta que corta perpendicularmente al eje *OZ* y que pasa por el punto *P* = (1, 2, 3).
b) Estudiar, en función del parámetro *a*, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+az=1$.

3. (Castilla y León, junio 15). (Sube un máximo de 1,5 puntos)
Halla el valor de *a* para que exista una recta que pase por el punto $P=(1+a, 1-a, a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ z=1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$.

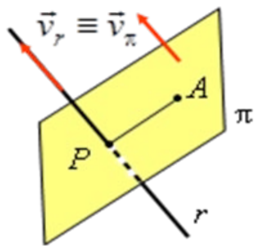
Alcalá de Henares, 7 de febrero de 2017

Soluciones

1. (Castilla y León, junio 16).
a) (1 punto) Calcula un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v}$ = (2, 1, –2).
b) (1,5 puntos) Calcula un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto A = (–1, 2, 0) sea mínima.
Solución:
a) Como el módulo de $\vec{v}$ = (2, 1, –2) es $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, el vector $-\frac{4}{3}\vec{v}$ tendrá módulo 4 y cumple que su sentido es el opuesto de $\vec{v}$.
El vector pedido es: $-\frac{4}{3}(2,1,-2) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

b) El punto pedido es el de corte de la recta r con el plano perpendicular a ella por el punto A.
Como $\vec{v}_r$ = (–1, 1, –2) y A = (–1, 2, 0), dicho plano es:

$$\pi \equiv -(x+1)+(y-2)-2z=0 \Rightarrow \pi \equiv -x+y-2z-3=0$$



Corte de r con π: se sustituyen las ecuaciones de $r \equiv (1-t, -2+t, 3-2t)$ en π, obteniéndose

$$\pi \equiv -(1-t)+(-2+t)-2(3-2t)-3=0 \Rightarrow 6t-12=0 \Rightarrow t=2$$

Para t = 2 se obtiene P = (–1, 0, –1).

2. (Comunidad Valenciana, junio 16)
Se dan las rectas $r: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) (1 punto) La recta paralela a r que pasa por el punto (0, 1, 0).
b) (1 punto) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. (Da su ecuación general).
c) (1 punto) La distancia entre las rectas r y s.
Solución:
a) Se expresa r en forma paramétrica.

$$r: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x+z=-3+2y \\ 3x-z=-1-y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix} \begin{cases} x+z=-3+2y \\ 4x=-4+y \Rightarrow y=4+4x \end{cases}.$$

Sustituyendo en $E1$: $x+z=-3+2(4+4x) \Rightarrow z=5+7x \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=4+4\lambda \\ z=5+7\lambda \end{cases}$.

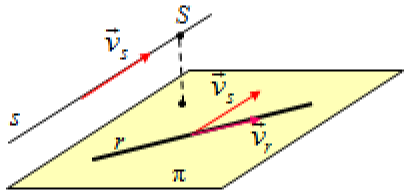
Por tanto, la paralela a r por el punto (0, 1, 0) será: $r': \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+4\lambda \\ z=7\lambda \end{cases}$.

b) El plano pedido viene determinado por la recta r y el vector de dirección de s, $\vec{v}_s$ = (0, 2, 1)
Su ecuación será:

$$\pi:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4+4\lambda+2\mu \\ z = 5+7\lambda+\mu \end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-4 & 4 & 2 \\ z-5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

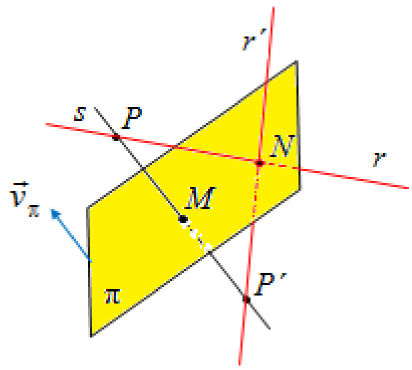
$$\pi: -10x-(y-4)+2(z-5)=0 \Rightarrow 10x+y-2z+6=0.$$

c) La distancia entre *r* y *s* es igual a la distancia de cualquier punto de *s* al plano π.
Tomando *S* = (1, 0, –2) se tendrá:



$$d(r,s)=d(S,\pi)=\frac{10+4+6}{\sqrt{10^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{20}{\sqrt{105}}$$

3. (Andalucía, junio 15).
Sean los puntos *A*(0, 1, 1), *B*(2, 1, 3), *C*(–1, 2, 0) y *D*(2, 1, *m*).
a) (1 punto) Calcula *m* para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en el mismo plano.
b) (1 punto) Determina la ecuación del plano respecto del cual *A* y *B* son simétricos.
c) (1 punto) Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
Solución:
a) Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* están en el mismo plano cuando los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** sean linealmente dependientes, lo que implica que el determinante asociado valdrá 0.



AB = (2, 1, 3) – (0, 1, 1) = (2, 0, 2);
AC = (–1, 2, 0) – (0, 1, 1) = (–1, 1, –1);
AD = (2, 1, *m*) – (0, 1, 1) = (2, 0, *m* – 1)

El determinante asociado es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)-4=0 \Rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos dados estarán en el mismo plano cuando *m* = 3.

b) Es el plano mediador: el que pasa por el punto medio de *A* y *B* y tiene como vector característico a ***AB***.

El punto medio de *A* y *B* es: $P\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2}\right) \to P(1,1,2)$

Como ***AB*** = (2, 0, 2), el plano pedido es:

$$\pi \equiv 2(x-1)+0(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+2z-6=0 \Rightarrow \pi \equiv x+z-3=0$$

c) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como ***AB*** = (2, 0, 2) y ***AC*** = (–1, 1, –1) se tiene que:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 0,\ 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

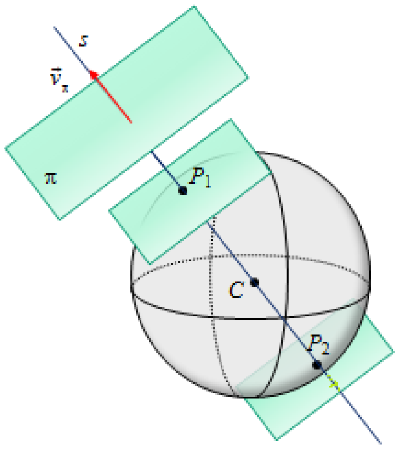
Luego, la superficie del triángulo será: $S=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\ \text{u}^2$.

4. (Madrid, junio 15).
(1,5 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

Hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.
Solución:
Los puntos de tangencia son los de corte de la esfera con la recta *s*, que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular al plano dado.
El centro de la esfera es el punto *C*(1, 1, 2); el vector normal al plano es $\vec{v}_\pi$ = (1, –2, 2).

Las ecuaciones de la recta son: $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+2t \end{cases}$.



El punto de corte de recta con la esfera se obtiene sustituyendo los valores de las componentes la recta en la ecuación de la esfera.

Como $s:\begin{cases} x-1=t \\ y-1=-2t \\ z-2=2t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

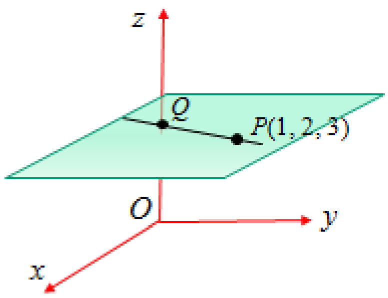
$$\Rightarrow (t)^2+(-2t)^2+(2t)^2=9 \Rightarrow t=\pm 1$$

Para *t* = 1: P_1 = (2, –1, 4) ⇒
$\pi_1 \equiv (x-1)-2(y+1)+2(z-4)=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-2y+2z-12=0$
Para *t* = –1: P_1 = (0, 3, 0) ⇒ $\pi_2 \equiv x-2(y-3)+2z=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+2z+6=0$

Subir nota

2. (Castilla y León, junio 15). (Sube un máximo de 1,5 puntos)
a) Calcula la recta que corta perpendicularmente al eje *OZ* y que pasa por el punto *P* = (1, 2, 3).
b) Estudiar, en función del parámetro *a*, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+az=1$.
Solución:
a) La recta pedida debe estar en el plano $z=d$, perpendicular al eje *OZ*. Como debe pasar por el punto P(1, 2, 3) ⇒ *d* = 3. Luego, el plano es $z=3$.
Como la recta corta al eje, debe pasar por el punto de corte del plano con el eje, que es *Q*(0,0, 3).
Por tanto, el vector director de la recta será:
PQ = (0, 0, 3) – (1, 2, 3) = (–1, –2, 0).

La recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=2-2t \\ z=3 \end{cases}$.



b) Si se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene: $az=1$, que es una ecuación compatible siempre que *a* ≠ 0.
Por tanto, la recta *r* y el plano π se cortarán siempre que *a* ≠ 0; no lo harán cuando *a* = 0.

3. (Castilla y León, junio 15). (Sube un máximo de 1,5 puntos)
Halla el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P=(1+a, 1-a, a)$, corte a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y=2\\ z=1\end{cases}$ y sea paralela a la recta $s\equiv\begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases}$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son: $r\equiv\begin{cases}x=h\\ y=2-h\\ z=1\end{cases}$; $s\equiv\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=-t\end{cases}$

La recta que pasa por el punto $P=(1+a, 1-a, a)$ y es paralela a s es: $s'\equiv\begin{cases}x=1+a+t\\ y=1-a\\ z=a-t\end{cases}$

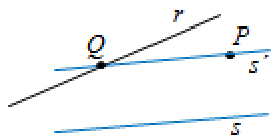
Para que las rectas se corten, sus coordenadas deben ser iguales en algún punto. Esto exige que el sistema siguiente debe ser compatible:

$$\begin{cases}h=1+a+t\\ 2-h=1-a\\ 1=a-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=1+a+t\to 1+a=1+a+1-a\Rightarrow a=1\\ h=1+a\\ t=1-a\end{cases}$$

(Se han igualado las respectivas componentes de una y otra recta, despejado h y t en la 2ª y 3ª ecuación, y se ha determinado a, que es único).

Luego, el sistema es compatible, con solución: $a = 1$, $h = 2$ y $t = 0$.

Por tanto, la recta paralela a s es: $s'\equiv\begin{cases}x=2+t\\ y=0\\ z=1-t\end{cases}$.



El punto de corte de las rectas r y s' es $Q(2, 0, 1)$.

Alcalá de Henares, 7 de febrero de 2017