EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

1. Los puntos $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD*.
a) (1 punto) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) (0,8 puntos) Halla el área de dicho paralelogramo.
c) (0,7 puntos) Calcula el vértice *D*.

2. **(MAJ12)** Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
a) (1 punto) Halla los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
b) (1 punto) Halla la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

3. (2,5 puntos) Considera la recta y el plano siguientes:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \qquad \pi : 2x + 4y + 4z = 5$$

a) (1 punto) Comprueba que la recta r y el plano π son paralelos.
b) (0,5 puntos) Calcula la distancia entre el plano π y la recta r.
c) (1 punto) Calcula la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

4. **(RMJ12)** (1 puntos) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π, siendo:

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \text{ y } \pi : x - 2y - z = 4$$

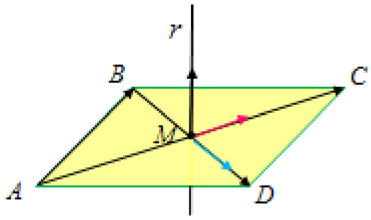
5. (2 puntos) Dado el punto $P(5, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 4z = -23$, halla la ecuación de una esfera que contenga al punto y sea tangente al plano.

Para subir nota.
6. Halla la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y tiene su centro en la recta $s : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

Alcalá de Henares, 22 de febrero de 2016

Soluciones:

1. a) (1 punto) El centro del paralelogramo es el punto de corte de sus diagonales; coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo la diagonal AC.



$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

Un vector director de la recta, es el normal del plano que contiene al paralelogramo, que es $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$.

$\mathbf{AB} = (-2, 1, 0) - (2, -1, 0) = (-4, 2, 0)$;

$\mathbf{AC} = (0, 1, 2) - (-2, 1, 0) = (2, 0, 2)$.

Como $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4,\ 8,\ -4) \approx (1, 2, -1)$, la recta es: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases}$

b) (0,8 puntos) El área del paralelogramo = $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$.

$\mathbf{AB} = (-2, 1, 0) - (2, -1, 0) = (-4, 2, 0)$; $\mathbf{AD} = \mathbf{BC} = (0, 1, 2) - (-2, 1, 0) = (2, 0, 2)$.

Por tanto: $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4,\ 8,\ -4) \to \text{Área} = \sqrt{16+64+16} = 16\sqrt{6}$

c) (0,7 puntos) Vértice D:

$\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} = \mathbf{OA} + \mathbf{BC} = (2, -1, 0) + (0, 1, 2) - (-2, 1, 0) = (4, -1, 2)$.

<u>De otra forma</u>:

Si $D = (a, b, c)$, como $\mathbf{AB} = \mathbf{DC} \Rightarrow (-4, 2, 0) = (-a, 1-b, 2-c) \to D = (4, -1, 2)$.

2. a) (1 punto) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores $\mathbf{P_1P_2}$, $\mathbf{P_1P_3}$ y $\mathbf{P_1P_4}$, que son:

$\mathbf{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a-1, 1, 1)$; $\mathbf{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5)$

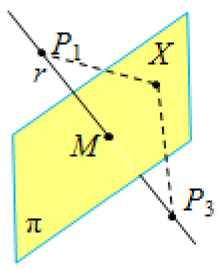
$\mathbf{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3)$.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|21a - 21 - 7\right| = \frac{1}{6}\left|21a - 28\right| = 7$$

Dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a - 28) = 7 \Rightarrow a = \frac{70}{21} = \frac{10}{3}\text{; o bien, } \Rightarrow \frac{1}{6}(-21a + 28) = 7 \Rightarrow a = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$$

b) (1 punto) Se trata del plano mediador: pasa por el punto medio del segmento P_1P_3 y es perpendicular al vector $\mathbf{P_1P_3}$.



Como $\mathbf{P_1P_3} = (0, 2, 5)$ y el punto $M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = (1, 4, 3/2)$, el plano pedido será:

$\pi : 2y + 5z + d = 0 \to 8 + 15/2 + d = 0 \Rightarrow d = -31/2 \Rightarrow \pi : 4y + 10z - 31 = 0$

<u>De otra forma</u>:

Si $X = (x, y, z)$ es un punto genérico de ese plano, como $d(X, P_1) = d(X, P_3)$, debe cumplirse que:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2} \to \pi : 4y + 10z - 31 = 0.$$

3. a) (1 punto) El vector de dirección de la recta es: $\vec{v}_r$ = (2, –5, 4).
El vector característico del plano: $\vec{v}_\pi$ = (2, 4, 4).
Ambos vectores son perpendiculares, pues $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi$ = (2, – 5, 4) · (2, 4, 4) = 0.
Además, el punto $P(1, –5, –3) \in r$ no pertenece al plano, pues:
$2 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) + 4 \cdot (-3) = -30 \neq 5$.
En consecuencia, la recta es paralela al plano.

b) (0,5 puntos) La distancia de π a r es igual a la distancia del punto *P* de *r* al plano.

$$d(P, \pi) = d\left(P(1,-5,-3), \pi: 2x+4y+4z-5=0\right) = \left|\frac{2-20-12-5}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}\right| = \frac{35}{6}.$$

c) (1 punto) El plano pedido viene determinado por el punto *P* y los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_\pi$.
Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda+2\mu \\ y = -5-5\lambda+4\mu \\ z = -3+4\lambda+4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+5 & -5 & 4 \\ z+3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - z - 5 = 0.$$

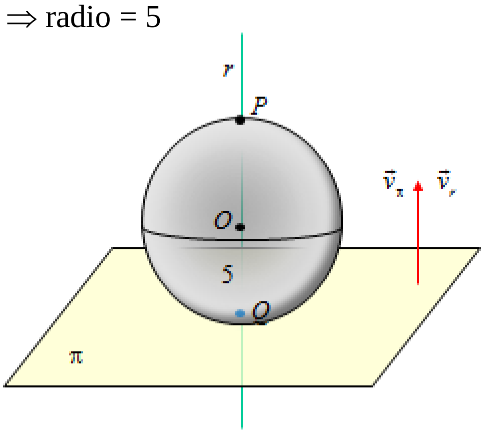
4. (1 punto) Su valor es complementario del ángulo formado por el vector de dirección de la recta y el vector característico del plano.
Esto es, ángulo (r, π) = 90º – ángulo $(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r)$

En consecuencia, sen $(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$.

Como $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$; $\vec{v}_\pi = (1, -2, -1) \Rightarrow \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{2+2-1_r}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60$. Por tanto, el ángulo que forman la recta y el plano es 30º.

5. (2 puntos) Hay infinitas esferas que siendo tangentes al plano contengan al punto dado. La más fácil de determinar (de manera concreta) es la que tiene por diámetro la distancia del punto al plano:

$$d\left(P(5,2,3), \pi: 3x+4z+23=0\right) = \left|\frac{15+12+23}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10 \Rightarrow \text{radio} = 5$$



El centro de la esfera, *O*, será el intermedio entre *P* y el plano. Para hallarlo hay que determinar el punto *Q*, de tangencia de la esfera con el plano. Ese punto es el de corte de la recta perpendicular al plano que contiene al punto con el plano π.
Su vector de dirección será: $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (3, 0, 4)$; como pasa por *P*:

$$r: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = 2 \\ z = 3+4t \end{cases}.$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$3(5+3t)+4(3+4t)+23=0 \Rightarrow 25t+50=0 \Rightarrow t=-2.$$

Por tanto: $Q(-1, 2, -5)$.
El centro de la esfera es el punto medio del segmento PQ:

$$M\left(\frac{5-1}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{3-5}{2}\right) = (2, 2, -1).$$

Luego, la ecuación de la esfera es:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$$

---

6. La ecuación de la recta en forma paramétrica es $s:\begin{cases} x=4+2t \\ y=1+t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Sea el punto genérico de la recta, $O(4+2t,\ \ 1+t,\ \ -2-t)$, su centro. Como el centro debe estar a la misma distancia de los puntos dados, se cumplirá que $d(A,O)=d(B,O)$.
Luego,

$$\sqrt{(2t)^2+t^2+(1-t)^2}=\sqrt{(1+2t)^2+(-1+t)^2+(-3-t)^2} \Rightarrow 10t+10=0 \Rightarrow t=-1.$$

El centro será $O(2, 0, -1)$. Su radio $d(A,O)=3$.
La ecuación de la esfera buscada es $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$.

Alcalá de Henares, 22 de febrero de 2016.