EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

(Recuperación)

1. **(CLJ05)** a) Discútase el sistema $\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$, en función del valor de *a*. (2,3 puntos)

b) Para el valor $a=1$, hállese, si procede, la solución del sistema. (0,7 puntos)

2. (**CVJ07**) Dada la matriz $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $3B(x)$ y halla el valor de *x* para el que dicho determinante vale 162. (1,5 puntos).

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de *a* para los que la matriz *A* posea inversa. (0,7 puntos).
b) La inversa de *A* para *a* = 2. (1.3 puntos)

4. **(CLS05)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de *A* sabiendo que $A^2-2A+I=O$, donde *I* es la matriz identidad y *O* es la matriz nula. (1,5 puntos)

5. Dado un número de tres cifras *ABC*, se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si permutamos las centenas con las unidades, obtenemos el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial permutamos decenas con unidades, obtenemos el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número. (2 puntos)

Peguntas para subir nota (Puede subirse un máximo de 3 puntos sobre la nota del primer examen)

1. **(PAS07)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que verifica $A^3-I=O$, con *I* matriz identidad y *O* matriz nula.
b) Calcula A^{13}.
c) Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz *X* que verifica la igualdad $A^2X+I=A$.

2. **(CLS11)** Discutir según los valores de *m* y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+y=2 \\ x+my=m \\ x+y=2 \end{cases}$.

3. Pregunta n. **5** del examen de recuperación.

Alcalá de Henares, 21 de noviembre de 2016

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

Soluciones

1. Consideramos las matrices *A* y *M*, siendo *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema es compatible cuando dichas matrices tienen el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución.

Se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = 2a^2 - a = a(2a-1)$.

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1/2$, el r(*A*) = 3 = r(*M*). En este caso el sistema es compatible determinado: tiene una única solución.
- Si $a = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = M$

En rango de *A* es 2, pues $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; pero el rango de *M* es 3, pues $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Por tanto, si $a = 0$, el sistema será incompatible: sin solución.

- Si $a = 1/2$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) = M$

En rango de *A* sigue siendo 2, pues $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0$. El rango de *M* es 3, pues el menor

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1/2 \end{vmatrix} = -3$. El sistema sigue siendo incompatible.

b) Si $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$, cuya solución, aplicando la regla de Cramer, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{1} = -6;\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10}{1} = 10;\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2$$

2.Haciendo transformaciones de Gauss se tiene:

$$|B(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F2 \end{matrix} \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ x+1 & -1 & 0 \\ 3x+2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \text{(desarrollando por la tercera columna)} =$$

$$6[-2(x+1)-(-1)(3x+2)] = 6x$$

Como la matriz B es de dimensión 3 $\Rightarrow$ $|3B(x)| = 3^3|B(x)| = 27\cdot 6x = 162x$.

Si se desea que $|3B(x)| = 162$, entonces x = 1.

3. a) La matriz A posee inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2+4a-3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq 3$.

b) Para a = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $|A|$ = 1.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Si $A^2-2A+I=O$ se tendrá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+cb \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & ab+cb-2b \\ 0 & c^2-2c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (a-1)^2 & b(a+c-2) \\ 0 & (c-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = b \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde $|A| = 1$.

5. El número ABC = A centenas + B decenas + C unidades = 100A + 10B + C
Se sabe que la suma de sus cifras es 16: $A + B + C = 16$
Si se permutan las centenas con las unidades: $ABC \to CBA$: el número se incrementa el 198.
Se cumple: $CBA = ABC + 198$.
Luego, $100C + 10B + A = 100A + 10B + C + 198 \Rightarrow 99C - 99A = 198 \Leftrightarrow C - A = 2$
Si se permutan las decenas con las unidades: $ABC \to ACB$: el número disminuye en 27.
Se cumple: $ACB = ABC - 27$.
Por tanto, $100A + 10C + B = 100A + 10B + C - 27 \Rightarrow 9C - 9B = -27 \Leftrightarrow C - B = -3$
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=16 \\ 99C-99A=198 \\ 9C-9B=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ C-A=2 \\ C-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=16 \\ A=C-2 \\ B=C+3 \end{cases}$$

Sustituyendo en los valores de A y B en la primera ecuación se tiene:

$C-2+C+3+C=16 \Rightarrow 3C=15 \Rightarrow C=5$; $A=3$; $B=8$.

El número dado es el 385.

Para subir nota

1. a) Multiplicando se tiene:

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Por tanto, $A^3-I=O$.

b) Como $A^3=I \Rightarrow A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I$. Por tanto, $A^{13}=A^{12}\cdot A=I\cdot A=A$

c) De $A^2X+I=A \Rightarrow A^2X=A-I \Rightarrow A\cdot A^2X=A\cdot(A-I) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^3X=A^2-A \Rightarrow X=A^2-A$

Luego, $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para que tenga solución es necesario que el rango de la matriz ampliada sea menor que 3.

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow m^2-(2-m)+2(1-m)=0 \Rightarrow m^2-m=0 \Rightarrow m=0 \text{ o } m=1.$$

Luego, el sistema puede tener solución cuando $m = 0$ o $m = 1$.

- Si $m = 0$, el sistema es $\begin{cases} y=2 \\ x=0 \\ x+y=2 \end{cases}$. Su solución, inmediata, es $x = 0$; y = 2.
- Si $m = 1$, el sistema es $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$. Evidentemente es incompatible: sus ecuaciones son contradictorias.

Por tanto, el sistema sólo es compatible si $m = 0$.