EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

(Recuperación)

1. (Valencia, junio 2008)

Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) (1 punto) Las matrices A^2 y A^3.

b) (1 punto) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de a, el rango de la matriz A. (0,7 puntos)

b) Calcula, para $a = -1$, la matriz X que verifica $A\cdot X=B$. (1,3 puntos)

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}\lambda x+2z=0\\ \lambda y-z=\lambda\\ x+3y+z=5\end{cases}$, dependiente del parámetro real λ, se pide:

a) Estudia la compatibilidad del sistema en función de los valores de λ. (2 puntos)

b) Halla su solución (en función de λ) cuando sea compatible determinado. (1 punto)

c) Halla su solución cuando sea compatible indeterminado. (0,5 puntos)

4. (Madrid, modelo 2017)

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta. Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.
(Puntuación: Planeamiento, 1,5 puntos; resolución, 1 punto).

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Alcalá de Henares, 20 de noviembre de 2018

Peguntas para subir nota (Puede subirse un máximo de 3 puntos sobre la nota del primer examen)

Pregunta 4 de la Recuperación. (Sube hasta 1 punto)

5. (Baleares, septiembre 2007) (Sube hasta 1 punto)

A cada matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se le asocia el polinomio $p(x)=x^2-(a+d)x+|A|$, donde $|A|$ indica el determinante de *A*. Diremos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz *A*. Se pide:

a) Encontrar una matriz que tenga como polinomio característico $p(x)=x^2+x+1$. ¿Cuántas matrices hay con ese mismo polinomio característico?

b) Si *A* tiene inversa, demostrar que el polinomio característico de la inversa, A^{-1}, es

$$p(x)=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$$

6. (Sube hasta 1 punto) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculan las matrices: A^2; A^3; A^4; A^{2018}.

b) Sin hacer otros cálculos, ¿cuál es la matriz A^{-1}?

Alcalá de Henares, 20 de noviembre de 2018

Soluciones

1. (Valencia, junio 2008)

Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) (1 punto) Las matrices A^2 y A^3.

b) (1 punto) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

<u>Solución</u>:

a) $A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\cdot17-29\cdot10 & 17\cdot29-29\cdot17\\ -10\cdot17+17\cdot10 & -10\cdot29+17\cdot17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$;

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot17+0 & -1\cdot29\\ -1\cdot(-10) & (-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}.$$

b) $(I+A)^3=(I+A)^2\cdot(I+A)=\left(I^2+2\cdot I\cdot A+A^2\right)\cdot(I+A)=(I+2A-I)(I+A)=$

$=2A\cdot(I+A)=\left(2A\cdot I+2A^2\right)=2A-2\cdot I$.

Luego α = –2 y β = 2.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de a, el rango de la matriz A. (0,7 puntos)

b) Calcula, para a = –1, la matriz X que verifica $A\cdot X=B$. (1,3 puntos)

<u>Solución</u>:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo; también es igual al número de filas o columnas que dicha matriz tiene linealmente independientes. Por tanto, el rango no puede ser mayor que 3.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq0$.

Para ver si puede ser 3 se hace su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=1+2a\Rightarrow |A|=0 \text{ cuando } a=-1/2.$$

Por tanto: si $a\neq -1/2$, el rango de A es 3; y si $a=-1/2$, su rango es 2.

b) Para $a=-1$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $|A|=-1$. Como $|A|\neq0$, la matriz A tiene inversa. En consecuencia: $A\cdot X=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de *A*, que es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, dependiente del parámetro real λ, se pide:

a) Estudia la compatibilidad del sistema en función de los valores de λ. (2 puntos)
b) Halla su solución (en función de λ) cuando sea compatible determinado. (1 punto)
c) Halla su solución cuando sea compatible indeterminado. (0,5 puntos)

Solución:

a) Hay que estudiar los rangos de la matriz de coeficientes, *A*, y de la matriz ampliada, *M*.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$$

Hallamos el determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda$. Este determinante vale 0 si λ = 0 o λ = −1.

- Para λ = 0, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$. En este caso r(*A*) = r(*M*) = 2, pues las columnas 1ª, 2ª y 4ª son proporcionales.

- Para λ = −1, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$.

Como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el rango de *M* es 3,mientras que el rango de *A* es 2.

En consecuencia:

- Si $\lambda \neq 0, -1$, r(A) = 3 = r(M) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda = 0$, r(A) = r(M) = 2 $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\lambda = -1$, r(A) = 2 y r(M) = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda \neq 0$ y -1, la solución del sistema, que hallamos por Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-4\lambda}{\lambda^2+\lambda}=\frac{-4}{\lambda+1};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2+\lambda}=\frac{\lambda+3}{\lambda+1};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\lambda}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}.$$

c) Para $\lambda = 0$, el sistema queda $\begin{cases} 2z=0\\ -z=0\\ x+3y+z=5\end{cases}$, cuya solución es: $\begin{cases} x=5-3t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$.

4. (Madrid, modelo 2017)

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

(Puntuación: Planeamiento, 1,5 puntos; resolución, 1 punto).

Solución:

En x gramos de A hay x gramos de oro (el 100 %).
En y gramos de B hay 0,75y gramos de oro y 0,15y gramos de plata (75 % de oro; 15 % de plata).
En z gramos de C hay 0,60z gramos de oro y 0,22z gramos de plata (60 % de oro; 22 % de plata).

Ecuaciones:

$x+y+z=25 \to$ el lingote pesa 25 g.

$x+0,75y+0,60z=0,72\cdot 25 \to$ la suma de las proporciones de oro debe ser del 72 %.

$0\cdot x+0,15y+0,22z=0,16\cdot 25 \to$ la suma de las proporciones de plata debe ser del 16 %.

Esto es:

$$\begin{cases} x+y+z=25\\ x+0,75y+0,60z=18\\ 0,15y+0,22z=4\end{cases} \to \text{puede resolverse por Gauss.}$$

$$\begin{cases} x+y+z=25\\ x+0,75y+0,60z=18\\ 0,15y+0,22z=4\end{cases} \Rightarrow E2-E1\begin{cases} x+y+z=25\\ -0,25y-0,40z=-7\\ 0,15y+0,22z=4\end{cases} \Rightarrow$$

$$\underset{0,25E3+0,15E2}{\Rightarrow}\begin{cases} x+y+z=25 \\ -0,25y-0,40z=-7 \\ -0,005z=-0,05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+12+10=25 \Rightarrow x=3 \\ -0,25y-4=-7 \Rightarrow y=12 \\ z=10 \quad \uparrow \end{cases}.$$

Hay que tomar 3 gramos de A, 12 g de B y 10 g de C.

Peguntas para subir nota (Puede subirse un máximo de 3 puntos sobre la nota del primer examen)

Pregunta 4 de la Recuperación.

5. (Baleares, septiembre 2007)

A cada matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se le asocia el polinomio $p(x)=x^2-(a+d)x+|A|$, donde $|A|$ indica el determinante de *A*. Diremos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz *A*. Se pide:

b) Encontrar una matriz que tenga como polinomio característico $p(x)=x^2+x+1$. ¿Cuántas matrices hay con ese mismo polinomio característico? (1 punto)

c) Si *A* tiene inversa, demostrar que el polinomio característico de la inversa, A^{-1}, es $p(x)=x^2-\dfrac{a+d}{|A|}x+\dfrac{1}{|A|}$ (1,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Si $p(x)=x^2+x+1 \Rightarrow \begin{cases} a+d=-1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$. Este sistema tiene infinitas soluciones, pero por tanteo se puede hallar una de ellas. Es el caso de: $a = 1$, $d = -2$, $b = 1$ y $c = -3$.

Por tanto, la matriz pedida es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa, su inversa es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix}$.

Por tanto, su polinomio característico será:

$$p(x)=x^2-\left(\frac{d}{|A|}+\frac{a}{|A|}\right)x+\left|A^{-1}\right|=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$$

6. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculan las matrices: A^2; A^3; A^4; A^{2018}.

b) Sin hacer otros cálculos, ¿cuál es la matriz A^{-1}?

<u>Solución</u>:

a) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = I .$$

$$A^{2018} = A^{2016+2} = A^{3\cdot 672+2} = \left(A^3\right)^{672} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Como $A^3 = A^2 \cdot A = I \Rightarrow A^{-1} = A^2$.

Alcalá de Henares, 20 de noviembre de 2018