EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

1. (EvAU, Castilla La Mancha, junio 18)
a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbf{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado.

2. a) (1,5 puntos) Obtener razonadamente el valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1.
b) (1 punto) Demuestra, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$.
Indica en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

3. (EvAU, Madrid, junio 17)
Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$, se pide:
a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.
b) (0,7 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.
c) (0,8 puntos) Resolver el sistema para $a = 2$.

4. (PAU, Madrid, septiembre 15)
(1,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

Alcalá de Henares, 6 de noviembre de 2018

Soluciones

1. (EvAU, Castilla La Mancha, junio 18)
a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbf{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado.
<u>Solución</u>:
a) Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}=2(a-1)(a-2)+a(a-1)=(a-1)(3a-4)$$

$\to |A|=0$ si $a = 1$ o $a=\dfrac{4}{3}$.

Por tanto, en los demás casos, cuando $a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{4}{3}$, la matriz A tendrá inversa.

b) La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|}$.

Para $a = 2$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=2$;

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$)

Para $a = 2$: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

2. a) (1,5 puntos) Obtener razonadamente el valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale –1.
b) (1 punto) Demuestra, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$.
Indica en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.
Solución:
a) Para una matriz M, cuadrada de orden n y no singular, se cumple:
1) $\left|M^k\right| = \left(|M|\right)^k$; 2) $\left(|M|\right)^{-1} = \dfrac{1}{|M|}$; 3) $|pM| = p^n|M|$; 4) $|M\cdot N| = |M|\cdot|N|$.
Luego, si A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale –1:

$$\left|\left(3A^4\right)\right| = 3^4|A|^4 = 81\cdot(-1)^4 = 81;\ \left|\left(4A^2\right)^{-1}\right| = \left(4^4|A|^2\right)^{-1} = \left(256\cdot(-1)^2\right)^{-1} = \frac{1}{256}.$$

Por tanto:

$$\left|\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}\right| = 81\cdot\frac{1}{256} = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

b) Restando la fila 1ª a la segunda y tercera:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

= 0, pues la segunda y tercera fila son proporcionales.

3. (EvAU, Madrid, junio 17)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.
b) (0,7 puntos) Resolver el sistema para a = 1.
c) (0,8 puntos) Resolver el sistema para a = 2.
Solución:
a) Hay que estudiar el rango de las matrices de coeficientes, A, y ampliada, M.

Estas matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) = M$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = -8 + a^2 + 4 = a^2 - 4$.

Este determinante vale 0 si $a = \pm 2$; y es distinto de 0 si $a \neq \pm 2$.
Con esto:

- Si $a \neq -2$ y 2 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = -2$ se tendrá, sustituyendo en las matrices: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) = M$

En este caso:

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6$.

El rango de M es 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$.

Como r(A) < r(M) el sistema será incompatible.

- Para $a = 2$ de tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) = M$. Como la columna 4ª es igual a la 1ª, ambas matrices tienen rango 2. El sistema será compatible indeterminado.

Por ejemplo, puede verse que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

b) Para $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$. Como se ha dicho, es compatible determinado: con solución única.

Puede resolverse por Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 4E1 - E2 \\ E2 + E3 \\ \end{array} \begin{cases} 8x + 5z = 4 \\ x + z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 4E1 - 5E2 \\ \\ \end{array} \begin{cases} 3x = -1 \\ x + z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{cases}.$$

c) Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Equivalente a: $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ z = 2y \end{cases} \to \begin{cases} x - 4y + 6y = 1 \\ z = 2y \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = 2y \end{cases}$.

Si se hace $y = t$ la solución es: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

4. (PAU, Madrid, septiembre 15)

(1,5 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que conmutan con *A*, es decir que cumplen $AB=BA$.

Solución:

$$A\cdot B=B\cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3a+c & 3b+d\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b & a\\ 3c+d & c\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3a+c=3a+b; & 3b+d=a\\ a=3c+d & b=c\end{cases}$$ $\Rightarrow$ (la solución debe darse en función de dos parámetros, de *b* y de *d*) $\rightarrow$ $$\begin{cases}a=3b+d\\ b=b\\ c=b\\ d=d\end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}3b+d & b\\ b & d\end{pmatrix}.$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II **ÁLGEBRA (Recuperación)**

Soluciones

Alcalá de Henares, 28 de noviembre de 2017