EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

1. (Asturias, septiembre 07)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1,2 puntos). Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I matriz identidad y O matriz nula.
b) (0,6 puntos). Calcula A^{13}.
c) (1,2 puntos). Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

2. (Aragón, junio 17)
B.1. a) Sea A una matriz de dimensión 3 × 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a1) (1 punto). Considere la matriz $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|$ = 1, calcule el determinante de A, es decir $|A|$.

a2) (1 punto). Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$, determine los valores de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) (0,5 puntos). Determina las matrices cuadradas de dimensión 2 × 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donde M' representa la matriz traspuesta de M.

3. (Comunidad Valenciana, junio 03)

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos). Determina para qué valores del parámetro λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
b) (1,5 puntos). Obtén las soluciones en los casos compatible determinado (1 punto) y compatible indeterminado (0,5 puntos).

4. (País Vasco, junio 17)
(1,5 puntos). Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Alcalá de Henares, 7 de noviembre de 2017

Examen de Matemáticas II (Álgebra) **Soluciones**

1. (Asturias, septiembre 07)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

a) (1,2 puntos). Comprueba que verifica $A^3-I=O$, con I matriz identidad y O matriz nula.
b) (0,6 puntos). Calcula A^{13}.
c) (1,2 puntos). Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X+I=A$.

Solución:

a) Multiplicando se tiene:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Por tanto, $A^3-I=O$.

b) Como $A^3=I \Rightarrow A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I \Rightarrow A^{13}=A^{12}\cdot A=I\cdot A=A$.

c) De $A^2X+I=A \Rightarrow A^2X=A-I \Rightarrow A\cdot A^2X=A\cdot(A-I) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^3X=A^2-A \Rightarrow X=A^2-A$

Luego,

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. (Aragón, junio 17)

B.1. a) Sea A una matriz de dimensión 3 × 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a1) (1 punto). Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|$ = 1, calcule el determinante de A, es decir $|A|$.

a2) (1 punto). Si $A=\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ x-1 & 2 & 0\\ 2 & x-1 & 2\end{pmatrix}$, determine los valores de x para los que se cumple que $|B|=1$, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) (0,5 puntos). Determina las matrices cuadradas de dimensión 2 × 2 de la forma $M=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM´=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, donde *M´* representa la matriz traspuesta de *M*.

<u>Solución</u>:

a.1) Para una matriz cuadrada, *A*, de orden *n* se cumple: $|kA|=k^n|A|$.

Por tanto, si *A* es de orden 3, se tiene que:

$$|B|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)A\right|=\frac{1}{2^3}|A| \Rightarrow 1=\frac{1}{2^3}|A| \Rightarrow |A|=8.$$

a.2) $$|A|=\begin{vmatrix}x & 1 & 1\\ x-1 & 2 & 0\\ 2 & x-1 & 2\end{vmatrix}=8 \Rightarrow 4x-2(x-1)+(x-1)^2-4=8 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3.$$

→ Si no se ha contestado el apartado a1) cabe otra alternativa:

$$B=\left(\frac{1}{2}\right)A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\ x-1 & 2 & 0\\ 2 & x-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{x-1}{2} & 1 & 0\\ 1 & \frac{x-1}{2} & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B|=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x-1)^2}{4}-1\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2} \Rightarrow |B|=\frac{x^2-1}{8}.$$

Si que se quiere que $|B|=1 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{8}=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.

b) $$MM´=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+x^2 & xy\\ yx & y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\pm 2\end{cases}.$$

Las matrices pedidas son: $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \pm 2\end{pmatrix}$.

3. (Comunidad Valenciana, junio 03)

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}\lambda x+2z=0\\ \lambda y-z=\lambda\\ x+3y+z=5\end{cases}$, se pide:

c) (2 puntos). Determina para qué valores del parámetro λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

d) (1,5 puntos). Obtén las soluciones en los casos compatible determinado (1 punto) y compatible indeterminado (0,5 puntos).

<u>Solución</u>:

a) Hay que estudiar los rangos de la matriz de coeficientes, *A*, y de la matriz ampliada, *M*.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & | & \lambda \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}=M$$

Se hace el determinante de *A*:

$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)-2\lambda=\lambda^2+\lambda$. Este determinante vale 0 si λ = 0 o λ = –1.

- Para λ = 0, se tiene: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}=M$. En este caso r(*A*) = r(*M*) = 2, pues las columnas 1ª, 2ª y 4ª son proporcionales.
- Para λ = –1, se tiene: $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}=M$.

El rango de *A* es 2, pues $|A_1|=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Como el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}=4\neq 0$, el rango de *M* es 3.

En consecuencia:

- Si λ ≠ 0, –1, r(*A)* = 3 = r(*M*) ⇒ el sistema es compatible determinado.
- Si λ = 0, r(*A*) = r(*M*) = 2 ⇒ el sistema es compatible indeterminado.
- Si λ = 1, r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3 ⇒ el sistema es incompatible.

b) Para λ ≠ 0 y –1, la solución del sistema, que puede hallarse por Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-4\lambda}{\lambda^2+\lambda}=\frac{-4}{\lambda+1}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2+\lambda}=\frac{\lambda+3}{\lambda+1};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\lambda}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}.$$

Para λ = 0, el sistema (que es compatible indeterminado) queda: $\begin{cases} 2z=0 \\ -z=0 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+3y=5 \end{cases}$.

Su solución es: $\begin{cases} x=5-3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

4. (País Vasco, junio 17)
(1,5 puntos). Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.
<u>Solución</u>:
Sean *x* los pasajeros que pagan el billete entero; *y*, los que pagan el 80%; *z*, los que pagan el 50%.
Por el enunciado se deduce que:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2\cdot x+\left(0,80\cdot 1,2\right)y+\left(0,50\cdot 1,2\right)z=46,56 \\ z=2\left(x+y\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2x+0,96y+0,6z=46,56 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

Se transforma el sistema:

$$\begin{array}{r} \\ E2-1,2E1 \\ E3-2\cdot E1 \end{array}\begin{cases} x+y+z=60 \\ -0,24y-0,6z=-25,44 \\ -3z=-120\to z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+40=60 \\ -0,24y-24=-25,44\to y=6 \\ z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=6 \\ z=40 \end{cases}.$$

Alcalá de Henares, 7 de noviembre de 2017