EXAMEN DE MATEMÁTICAS II ÁLGEBRA

(Recuperación)

1. Propuesto en Selectividad, Asturias 2007.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & a & 1 & 1+a\end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de *a*, el rango de las matrices *A* y *B*. (1,5 puntos). Si el rango es menor que 3, ¿qué relación de dependencia se da entre las filas de la matriz *A*? (0,5 puntos)
b) Calcula, para $a = -1$, la matriz *X* que verifica $A\cdot X = B$. (2 puntos)

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y=1\\ my+z=0\\ x+(m+1)y+mz=m+1\end{cases}, \text{ donde } m\in\mathbf{R}$$

a) (1,5 puntos) Determina el carácter del sistema según los valores de *m*.
b) (1 punto) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.
c) (0,4 puntos) A partir del resultado anterior, indica la solución cuando *m* = 2 y cuando *m* = 20.
d) (0,5 puntos) Resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.
e) (0,6 puntos) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de *m*. Justifica tu respuesta.

3. Propuesto en Selectividad, Madrid 2008.
El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros. (2 puntos)

Peguntas para subir nota (Puede subirse un máximo de 3 puntos sobre la nota del primer examen)

1. Propuesto en Selectividad, Cantabria 2009.
Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.
a) Si *A* y *B* son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces *AB* = *BA*. (+0,3 puntos)
b) Si *B* es una matriz cuadrada, entonces $(I+B)^2 = I+2B+B^2$ (siendo *I* la matriz identidad del mismo orden que *B*). (+0,3 puntos)
c) La suma de matrices regulares (inversibles) es una matriz regular (inversible). (+0,4 puntos)

2. Propuesto en Selectividad, Asturias 2013.

Dado el sistema $\begin{cases} ax+2y+2z=a\\ 2x+ay+2z=-a\\ 2x+2y+az=0\end{cases}$.

a) Estudia su compatibilidad según los valores del número real *a*. (+ 1,5 puntos)
b) Resuelve el sistema, si es posible, cuando *a* = –4. (+0,5 puntos)

Alcalá de Henares, 28 de noviembre de 2017

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II **ÁLGEBRA (Recuperación)**

Soluciones

1. Propuesto en Selectividad, Asturias 2007.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & a & 1 & 1+a\end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de *a*, el rango de las matrices *A* y *B*. (1,5 puntos). Si el rango es menor que 3, ¿qué relación de dependencia se da entre las filas de la matriz *A*? (0,5 puntos)
b) Calcula, para $a = -1$, la matriz *X* que verifica $A\cdot X = B$. (2 puntos)
Solución:
a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo. También es igual al número de filas o columnas que dicha matriz tiene linealmente independientes. Por tanto, en los dos casos, el rango no puede ser mayor que 3.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Para ver si puede ser 3 se hace su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{vmatrix} = 1+2a \Rightarrow |A| = 0 \text{ cuando } a = -1/2.$$

Por tanto: si $a \neq -1/2$, el rango de *A* es 3; y si $a = -1/2$, su rango es 2.

Como la matriz *B* es una ampliación de la matriz *A*, se calcula otro de sus menores de orden 3,

$$|M| = \begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix} = -2(a-1)-3 = -1-2a$$. Este menor también se anula para $a = -1/2$.

En consecuencia: si $a \neq -1/2$, el rango de *B* es 3; y si $a = -1/2$, su rango es 2.
Nota: Podría observarse que $C4 = C2 + C3$. (Si se indica esta relación se deduce, de manera inmediata, que las matrices *A* y *B* tienen rangos iguales)

b) Para $a = -1$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $|A| = -1$.

Como $|A| \neq 0$, la matriz *A* tiene inversa. En consecuencia: $A\cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de *A*, que es:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}. \text{ Luego } A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}, \text{ donde } m \in \mathbf{R}$$

a) (1,5 puntos) Determina el carácter del sistema según los valores de m.
b) (1 punto) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.
c) (0,4 puntos) A partir del resultado anterior, indica la solución cuando $m = 2$ y cuando $m = 20$.
d) (0,5 puntos) Resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.
e) (0,6 puntos) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m. Justifica tu respuesta.

Solución:
a) Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes (A) y de la ampliada (M): si son iguales, el sistema es compatible; si el rango de A es menor que el rango de M, el sistema será incompatible.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right)=M$$

Luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=m^2-m=m(m-1).$$

Por tanto:

- Si $m \neq 0$ y 1, r(A) = 3 = r(M) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

- Si $m = 0$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=M$.

Como la primera y tercera fila de la matriz ampliada son iguales $\Rightarrow$ r(A) = 2 = r(M) = 2. El sistema es compatible indeterminado.

Puede verse que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

- Si $m = 1$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=M$.

Como $M_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1\neq 0$ $\Rightarrow$ r(M) = 3. En consecuencia, el sistema será incompatible.

b) Si $m \neq 0$ y 1, por la regla de Cramer, la solución del sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$ es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ m+1 & m+1 & m\end{vmatrix}}{m(m-1)}=\frac{m^2-m-1+m+1}{m(m-1)}=\frac{m}{m-1};\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & m+1 & m\end{vmatrix}}{m(m-1)}=\frac{-m}{m(m-1)}=\frac{-1}{m-1};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m & 0\\ 1 & m+1 & m+1\end{vmatrix}}{m(m-1)}=\frac{m^2}{m(m-1)}=\frac{m}{m-1}.$$

c) Hay que sustituir el valor de m en la expresión general de la solución.

- Para $m = 2$, las soluciones son: $x = 2$; $y = -1$; $z = 2$.
- Para $m = 20$, se tiene: $x = 20/19$; $y = -1/19$; $z = 20/19$.

d) El sistema es compatible indeterminado si $m = 0$.

Para $m = 0$ el sistema queda: $\begin{cases}x+y=1\\ z=0\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$. Su solución es: $\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$.

e) Hay que conseguir que el rango dela matriz de coeficientes sea 3. Para ello su determinante debe ser distinto para cualquier valor de m.
Si la tercera ecuación fuese $2x+(m+1)y+mz=m+1$, la matriz de coeficientes será:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ 2 & m+1 & m\end{pmatrix}$, con $|A|=m^2-m+1$, que no se anula para ningún valor real de m.

$\rightarrow$ Hay infinitas posibilidades cambiando el coeficiente de la x. Así, en el supuesto de que la tercera ecuación fuese $kx+(m+1)y+mz=m+1$, se tendría que:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ k & m+1 & m\end{pmatrix}$, con $|A|=m^2-m-1+k$.

Para que $|A|=m^2-m-1+k\neq 0$ siempre es preciso que $k>\frac{5}{4}$.

Las soluciones de la ecuación $m^2-m-1+k=0$ son $m=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1+k)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5-4k}}{2}$. Estas soluciones no se dan cuando $5-4k<0 \Rightarrow k>\frac{5}{4}$.

3. Propuesto en Selectividad, Madrid 2008.
El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros. (2 puntos)
Solución:

Sean x, y, z el número de billetes de 50, 20 y 10 euros, respectivamente.
Deben cumplirse las siguientes relaciones:

$x + y + z = 225$
$50x + 20y + 10z = 7000$
$x + z = 2y$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=225 \\ 5x+2y+z=700 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{(por Gauss)} \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=225 \\ 4x+y=475 \\ -3y=-225 \end{cases}$$

Su solución es $y = 75$; $x = 100$; $z = 50$.

Peguntas para subir nota (Puede subirse un máximo de 3 puntos sobre la nota del primer examen)

1. Propuesto en Selectividad, Cantabria 2009.
Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.
a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces $AB = BA$. (+0,3 puntos)
b) Si B es una matriz cuadrada, entonces $(I+B)^2 = I + 2B + B^2$ (siendo I la matriz identidad del mismo orden que B). (+0,3 puntos)
c) La suma de matrices regulares (inversibles) es una matriz regular (inversible). (+0,4 puntos)
Solución:
a) En general, el producto de matrices no es conmutativo. Por tanto, la afirmación $AB = BA$ es falsa.
Para comprobarlo basta con poner un contraejemplo. Así, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ se tiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Como puede verse, los resultados son distintos.

b) La afirmación $(I+B)^2 = I + 2B + B^2$ es cierta siempre, pues $IB = BI = B$ e $I^2 = I$. Por tanto,

$$(I+B)^2 = (I+B)(I+B) = I^2 + IB + BI + B^2 = I + 2B + B^2.$$

c) La afirmación, “la suma de matrices regulares (inversibles) es una matriz regular (inversible)” es falsa.

Contraejemplo:
Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ambas son inversibles, pues tienen determinante distinto de 0.
En cambio, $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ no es inversible, ya que su determinante vale 0: $|A+B| = 0$.

2. Asturias, junio 2013.

Dado el sistema $\begin{cases} ax+2y+2z=a \\ 2x+ay+2z=-a \\ 2x+2y+az=0 \end{cases}$.

a) Estudia su compatibilidad según los valores del número real a. (+ 1,5 puntos)
b) Resuelve el sistema, si es posible, cuando a = –4. (+0,5 puntos)

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 & -a \\ 2 & 2 & a & 0 \end{array}\right)=M$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=a\left(a^2-4\right)-2(2a-4)+2(4-2a)=(a-2)(a(a+2)-4-4) \Rightarrow$$

$|A|=(a-2)\left(a^2+2a-8\right) \Rightarrow |A|=0$ si $a=2$ o $a=-4$; y $|A|\neq 0$ si $a\neq 2$ y $a\neq -4$.

Por tanto:

- Si $a\neq 2$ y $a\neq -4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si a = 2, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)=M \to$ r(A) = 1 y r(M) = 2.

Luego, si a = 2, el sistema es incompatible.

- Si a = –4, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)=M \to$ r(A) = 2: $|A_1|=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\neq 0$. Como el

menor $|M_1|=\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-48+48=0 \Rightarrow$ r(M) = 2.

Luego, si a = –4, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = –4, el sistema es $\begin{cases} -4x+2y+2z=-4 \\ 2x-4y+2z=4 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E2/2 \\ E3/2 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=2-z \\ x+y=2z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \end{matrix}\begin{cases} -3y=2-3z \\ x+y=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2/3+z \\ x=2z-y \to x=2/3+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}+t \\ y=-\dfrac{2}{3}+t \\ z=t \end{cases}.$$

Alcalá de Henares, 28 de noviembre de 2017