

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II**ÁLGEBRA**

1. (CTJ16) Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Calcula todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfacen la igualdad

$A^2 + A = 2I$, donde I es la matriz identidad.

b) (1 punto) Justifica que si A es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2 + A = 2I$, entonces A es invertible, y calcula la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I .

2. (CMJ16) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$, donde x, y, z, a, b y $c \in \mathbf{R}$, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1 punto cada determinante).

3. (PVJ16) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz no sea inversible.

b) (1,5 puntos) En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$.

4. (ARJ16) a) (2,5 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determina para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x + \lambda y + \lambda z = 4 \\ \lambda x + \lambda y + z = 6 \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z = 3 + \lambda \end{cases}$$

b) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

c) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 1$.

Alcalá de Henares, 4 de noviembre de 2016

Examen de Matemáticas II (Álgebra)**Soluciones**

1. (CTJ16) Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Calcula todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfacen la igualdad

$A^2 + A = 2I$, donde I es la matriz identidad.

b) (1 punto) Justifica que si A es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2 + A = 2I$, entonces A es invertible, y calcula la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I .

Solución:

$$\text{a) Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ satisfacen la igualdad $A^2 + A = 2I$. No depende del valor de m .

$$\text{b) Si } A^2 + A = 2I \Rightarrow A(A + I) = 2I.$$

Por tanto,

$$|A(A + I)| = |2I| \Rightarrow |A| \cdot |A + I| = 2 \cdot |I| \Rightarrow |A| \cdot |A + I| = 2 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Luego, A es invertible. Su inversa será $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I)$.

$$\text{En efecto: } A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{2}(A + I) = \frac{1}{2}A(A + I) = \frac{1}{2}2I = I.$$

2. (CMJ16) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$, donde x, y, z, a, b y $c \in \mathbf{R}$, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1 punto cada determinante).

Solución:

Se extrae “factor común” de las filas 1ª y 3ª: después se resta a la 2ª fila el doble de la 1ª.

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = 7 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 7 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot 10 = 14.$$

Se desarrolla el determinante por la 1ª columna; después se intercambian las filas como se indica en cada caso (cada cambio de filas implica un cambio de signo):

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} F1 \leftrightarrow F3 \\ +5 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3a & 2b & 3c \\ 3x & y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} -5 \\ F3 \leftrightarrow F2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot 10 = -150.$$

→ En el último paso se ha extraído el factor 3 de la primera columna.

3. (PVJ16) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) (1 punto) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz no sea invertible.
 b) (1,5 puntos) En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$.

Solución:

- a) Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a(2a-2) + 2 - (a-2) - (2-a(a-2)) = 3a^2 - 5a + 2$$

$$|A| = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2/3 \end{matrix} \right.$$

La matriz A no es invertible cuando $a = 1$ o $a = \frac{2}{3}$.

- b) Si $a = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, pues $|A| = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$.

Su inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$.

$$\text{La matriz adjunta es } \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. (ARJ16) a) (2,5 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determina para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x + \lambda y + \lambda z = 4 \\ \lambda x + \lambda y + z = 6 \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z = 3 + \lambda \end{cases}$$

b) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

c) (0,75 puntos) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 1$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de A sea menor que el rango de M .

Las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array} \right) = M$

Conviene transformar ambas matrices: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ F3 - F1 & -\lambda + 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = M$

El determinante de A , $|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda + 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-\lambda + 1)(\lambda - \lambda^2)$.

Este determinante vale 0 si $\lambda = 1$ o $\lambda = 0$.

Con esto:

- Si $\lambda \neq 1$ y $0 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado.
- Si $\lambda = 1$ se tendrá, sustituyendo en la matriz transformada (aunque puede hacerse en la primera):

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = M \Rightarrow r(A) = r(M) = 2. \text{ El sistema será compatible indeterminado con un}$$

grado de indeterminación.

- Si $\lambda = 0$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = M \Rightarrow r(A) = 2; r(M) = 3. \text{ El sistema será}$

incompatible.

En efecto: $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$

b) Si $\lambda = 2$ el sistema es compatible determinado, equivalente a:

$$\begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 2x+2y+z=6 \\ -2x+2y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow E2+2E1 \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 6y+5z=14 \\ -2y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow E3-2E1 \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 4y+5z=14 \\ -z=5 \end{cases} \Rightarrow E3+E2 \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 4y+5z=14 \\ -z=5 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -x+13-10=4 \rightarrow x=-1 \\ 6y-25=14 \rightarrow y=13/2 \\ z=-5 \end{cases}$$

c) Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=6 \\ -x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow (\text{Se elimina la tercera ecuación}). \\ \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow E2-E1 \begin{cases} -x+y+z=4 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+y+z=4 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5-z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}.$$