EXAMEN DE MATEMÁTICAS II (Recuperación) ÁLGEBRA

1. a) (2,5 puntos) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

2. Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Si el determinante de A vale 2, $|A| = 2$, calcula los siguientes determinantes, indicando en cada caso las propiedades utilizadas:

a) (0,75 puntos) $|2A|$.

b) (0,75 puntos) $|A^{-1}|$

c) (0,5 puntos) $|A \cdot A^t|$ (A^t es la traspuesta de la matriz A).

d) (0,5 puntos) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A.

e) (0,5 puntos) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

3. Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix}$, donde $m \in \mathbf{R}$.

a) (1,25 puntos) Determina el rango de la matriz BA.

b) (1 punto) Determina los valores de m para los que la matriz $(AB)^t$ es regular (inversible).

c) (1,25 puntos) Para $m = 0$ calcula una matriz X tal que $(AB)^t X = I$, siendo I la matriz identidad.

Para subir nota. (Cada respuesta correcta sube 1 punto la calificación que tenías).

1. (Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ -x + ay + az = 2a + 1 \\ x + y + (a^3 - 2a)z = a - 1 \end{cases}$$

2. Para cada x se define la matriz $A(x)$ como sigue

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular razonadamente el determinante de la matriz $A(x)$.

3. La pregunta 3 de arriba.

Alcalá de Henares, 24 de noviembre de 2015. JoséMMM

Soluciones:

1. Se consideran las matrices *A* y *M*, siendo *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada con los términos independientes. El sistema es compatible cuando dichas matrices tienen el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución.

Con esto: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M$

El determinante de *A*,

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8)$$

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 8/3.

Con esto:

- Si λ ≠ 1 y 8/3 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = 1, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$

El rango de *A* es 2.

Para ver el rango de *M* calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, el rango de *M* también vale 2.

Luego, si λ = 1 el sistema es compatible indeterminado.

- Si λ = 8/3, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array}\right) = M$

El rango de *A* es 2.

Para ver el rango de *M* calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8/3 \end{vmatrix} = -10$. Por tanto, el rango de *M* es 3.

Luego, si λ = 8/3 el sistema es incompatible.

b) Para λ = 0 el sistema inicial queda $\begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$.

Aplicando el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + 3E1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 6y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 6y = 6 \\ 4x = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4} \to -\frac{15}{4} + 6y = 6 \Rightarrow y = \frac{13}{8} \to \frac{13}{8} - z = 2 \Rightarrow z = -\frac{3}{8}$$

2. Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:
(1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.
(2) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.
(3) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualesquiera. Con más precisión: si la fila F_i se sustituye por $F_i + kF_j$.
(4) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.
(Lo dicho para filas es idéntico para columnas).
(5) Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$, entonces: $|kA| = k^n |A|$.
(6) El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

a) Por la propiedad (5), como A es de orden 3, $|2A| = 2^3|A| = 8\cdot 2 = 16$

b) Aplicamos que $A\cdot A^{-1} = I$ y la propiedad (6). Por tanto:

$$|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \Rightarrow 2|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

c) Aplicamos las propiedades (1) y (5).

$$|A\cdot A^t| = |A|\cdot|A^t| = 2\cdot 2 = 4$$

d) Por la propiedad (2), el nuevo determinante valdrá –2.

e) Por la propiedad (3), el nuevo determinante seguirá valiendo 2.

3. a) La matriz $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & m & 2m+2 \end{pmatrix}$.

Su determinante vale: $|BA| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & m & 2m+2 \end{vmatrix} = m(-2m-2+2m) + 2m = 0$.

Como el determinante vale 0, el rango de *BA* es menor que 3, independientemente del valor de *m*.

Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de *BA* es 2 para cualquier valor de *m*.

b) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2m & 3 \\ m & m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} -1+2m & m \\ 3 & m+2 \end{pmatrix}$.

Esta matriz será inversible cuando su determinante sea distinto de 0.

Como $\begin{vmatrix} -1+2m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2$ se anula cuando $m = -1$ o $m = 1$, la matriz será invertible para cualquier valor de $m \neq \pm 1$.

c) Para $m = 0$ la matriz $(AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz es inversible y su inversa es $\left((AB)^t\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa se calcula aplicando la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{|M|}\cdot(M_{ij})^t$, siendo (M_{ij}) la matriz de los adjuntos de M. En este caso, $(M_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; y $|M| = -2$.

La ecuación $(AB)^t X = I \Leftrightarrow X = \left((AB)^t\right)^{-1}$. Por tanto, $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Para subir nota

1. Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array}\right) = M \Leftrightarrow \text{(Transformaciones de Gauss)}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{array}{r} \\ F2+F1 \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & a^3-a & a-1 \end{array}\right) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-az=0 \\ (a+1)y = 2a+1 \\ (a^3-a)z = a-1 \end{cases}$$

Cálculo de los rangos (puede observarse que ambos rangos son como máximo 3).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3-a) = a(a+1)^2(a-1)$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$, $a = -1$ o $a = 1$

Con esto:

- Si $a \neq 0, -1$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = M$

Es obvio que el rango de A vale 2, mientras que el de M es 3. Por tanto, en este caso, el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = M$

En este caso, también de manera inmediata, se ve que r(*A*) = 1 y r(*M*) = 2. El sistema vuelve a ser incompatible.

- Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$$

Como ambos rangos son iguales, r(*A*) = 2 = r(*M*), el sistema será compatible indeterminado.

Soluciones en los casos de compatibilidad.

- Para $a \neq 0, -1, 1$, despejando escalonadamente se tiene:

$$z = \frac{a-1}{a^3 - a} = \frac{1}{a(a+1)} \;; \quad y = \frac{2a+1}{a+1}$$

$$x + y - az = 0 \Rightarrow x + \frac{2a+1}{a+1} - a \cdot \frac{1}{a(a+1)} = 0 \Rightarrow x + \frac{2a+1}{a+1} - \frac{1}{a+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2a}{a+1}$$

<u>Nota:</u> Como puede observarse, si $a = 0$ o $a = -1$ estas soluciones no tienen sentido.

- Para $a = 1$, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad 2y \quad = 3 \\ \quad 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = t \end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} + t \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

2. Para calcular el determinante se realizan algunas transformaciones de Gauss que, como se sabe, lo dejan invariante.
En principio restamos la última fila a todas las demás:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} F1-F4 \\ F2-F4 \\ F3-F4 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante obtenido por la primera columna, vale:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = -(x-1)^3$$