

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II**ÁLGEBRA**

1. (1,5 puntos) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

2. (1,25 puntos) Calcula el valor $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

3. (1,25 puntos) (PVJ15)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$. Calcula, de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el

valor del siguiente determinante: $A = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

4. (CMJ15)

a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. (0,75 puntos)

b) Calcula X , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,75 puntos)

5. Sea a un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

a) (2,5 puntos) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y determina para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior en el caso $a = 2$.

Alcalá de Henares, 5 de noviembre de 2015

Examen de Matemáticas II (Álgebra)**Soluciones**

1. (1,5 puntos) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A - I) = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4; & a = -3 \\ a = 4; & a = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

La única solución común es $a = 4$.

2. (1,25 puntos) Calcula el valor $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

Solución:

Hay diferentes formas de hacerlo, pero en todas deben aplicarse algunas transformaciones de Gauss. Aquí, si se resta la cuarta columna a las otras tres, queda:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = (\text{Por } F1) = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 b.$$

3. (1,25 puntos) (PVJ15)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$. Calcula, de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el

valor del siguiente determinante: $A = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

Solución:

Se aplicarán las transformaciones de Gauss, que se indican en cada caso:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = (\text{se extrae el factor 2 de la primera fila}) = \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = (\text{se resta la fila } 1^{\text{a}} \text{ a la } 2^{\text{a}} \text{ y a la } 3^{\text{a}}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (\text{se extrae el factor } -1 \text{ de la 3ª fila}) = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 10 = -20.$$

4. (CMJ15)

a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. (0,75 puntos)

b) Calcula X , siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,75 puntos)

Solución:

a) $X \cdot A + B = X \Rightarrow X \cdot A - X = -B \Rightarrow X \cdot A - X \cdot I = -B \Rightarrow X \cdot (A - I) = -B \Rightarrow X = -B \cdot (A - I)^{-1}$.

Esta solución supone que existe $(A - I)^{-1}$, lo que exige que $|A - I| \neq 0$.

Si la condición anterior no se cumpliera, el valor de la matriz X habría que determinarlo planteando un sistema de ecuaciones.

b) Para las matrices dadas: $(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $|A - I| = -1$, la matriz tiene inversa.

La inversa es: $(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \left((A - I)_{ij} \right)^t = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X = -B \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow X = - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sea a un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

a) (2,5 puntos) Calcula el determinante de la matriz de los coeficientes y determina para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior en el caso $a = 2$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)(a - 1)(a + 2).$$

La descomposición factorial se hace aplicando el teorema del resto: viendo que una raíz es $a = 1$, dividiendo por Ruffini y resolviendo la ecuación de segundo grado.

Para estudiar la compatibilidad del sistema hay que estudiar los rangos de las matrices A y M , de coeficientes y ampliada, respectivamente. El sistema es compatible cuando dichas matrices tengan el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución. Con esto:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array} \right) = M$$

Como se ha visto, $|A| = (a-1)(a-1)(a+2) \Rightarrow |A| = 0$ si $a = 1$ (raíz doble) o $a = -2$.

Luego:

- Si $a \neq 1$ y $-2 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = M \Rightarrow r(A) = r(M) = 1$.

El sistema será compatible indeterminado con dos grados de libertad.

El sistema inicial quedará reducido a $\{x + y + z = 1\}$.

- Si $a = -2$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) = M$.

El rango de A es 2; pero el rango de M es 3, pues el menor de M ,

$$|M1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3 \neq 0.$$

En este caso el sistema es incompatible.

$$\text{b) Para } a = 2, \text{ el sistema es: } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{Por Gauss}) \begin{matrix} E1 - 2E3 \\ E2 - E3 \end{matrix} \begin{cases} -y - 3z = -7 \\ y - z = -2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1 + E2 \\ E2 - E3 \end{matrix} \begin{cases} -4z = -9 \\ y - z = -2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 9/4 \\ y - 9/4 = -2 \rightarrow y = 1/4 \\ x + y + 2z = 4 \rightarrow x + 1/4 + 18/4 = 4 \rightarrow x = -3/4 \end{cases}.$$

L solución es: $x = -\frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{9}{4}$.