DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Examen Final (sólo 2ª parte) de Análisis Matemático 21-Mayo-2015 GRADOS ECO y ENI

NOMBRE: **D.N.I.** **TURNO:**

TEST → 4.5 PUNTOS (Cada pregunta contestada correctamente suma 0.5 puntos, y contestada erróneamente resta 0.2 puntos.)

1. La ecuación del plano tangente a la superficie dada por $f(x,y)=\cos(xy+3)-\dfrac{x}{y}$, en el punto (3, –1) es:

a) $x-3y+z+6=0$. b) $3x-y+4z+2=0$.

c) $x+3y-z+4=0$.

2. La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $F(x,y)\equiv(x-3)^2+(y+4)^2+xy-18=0$, en el punto (7, –1) es:

a) $7x+13y-36=0$. b) $y+1=-\dfrac{1}{3}(x-7)$.

c) Ninguna de las anteriores.

3. La función $f(x,y)=\dfrac{x^4+pxy}{y^2-xy}$ es homogénea de grado 2:

a) Sólo si $p = 0$

b) Para cualquier valor de p.

c) Ninguna de las anteriores.

4. Dada $f(x,y)=\sqrt{100-(x^2+y^2)}$ se verifica:

a) Su dominio de definición son todos los puntos del plano $\mathbf{R}^2$.

b) La curva de nivel $c = 6$ es la circunferencia con centro en el origen y radio 8.

c) Ninguna de las anteriores.

5. La derivada direccional de $f(x,y)=xe^{x^2-y}$, en el punto (–2, 4), en la dirección del vector $\vec{v}=(1,\ -1)$ vale:

a) –6. b) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$.

c) Ninguna de las anteriores.

6. La pendiente de la curva de nivel que pasa por el punto (2, –1), del campo $f(x,y)=\ln(xy+3)+x^2-2xy-8$, vale:

a) 5/2 b) 3 c) –5

7. El módulo del vector gradiente de la función $f(x,y)=\dfrac{x}{5+x^2-xy}$, en el punto (–1, 3), vale:

a) $\sqrt{17}/81$. b) $\sqrt{10}$.

c) Ninguna de las anteriores.

8. La dirección de máximo crecimiento del campo $f(x,y)=x^2\cos(x-y)$, en el punto (2, 2), puede venir dada por el vector:

a) (2, –2) b) (4, 1) c) (1, 0)

9. El valor de a que verifica que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\frac{5}{7}$ es:

a) $a = 3$. b) $a = 7$.

c) Ninguna de las anteriores, el valor de a debe ser: _____

PROBLEMAS → 5,5 PUNTOS

P1. (2,25 puntos) Dada la función $f(x,y)=e^{x^2-y-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Dibuja la curva de nivel 1.

b) (1,25 punto) Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, –1).

c) (0,5 puntos) Desarrolla la expresión anterior hasta su forma polinómica.

P2. (2 puntos) Halla y clasifica los puntos estacionarios de la función

$$f(x,y)=x^2y-2y^2-x^2.$$

P3. (1,25 puntos) Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación $y=2x^2$ y la recta $y=2x+4$.

SOLUCIONES

TEST

1. La ecuación del plano tangente a la superficie dada por $f(x,y)=\cos(xy+3)-\dfrac{x}{y}$, en el punto (3, –1) es:

a) $x-3y+z+6=0$. b) $3x-y+4z+2=0$. c) $x+3y-z+4=0$.

Solución:

$$f_x(x,y)=-\sin(xy+3)\cdot y-\frac{1}{y} \Rightarrow f_x(3,-1)=-\sin 0-\frac{1}{(-1)}=1$$

$$f_y(x,y)=-\sin(xy+3)\cdot x+\frac{x}{y^2} \Rightarrow f_y(3,-1)=-\sin 0+\frac{3}{(-1)^2}=3$$

Como $f(3,-1)=\cos 0-\dfrac{3}{(-1)}=4$, se tiene que la ecuación del plano tangente es:

$$z-4=1\cdot(x-3)+3\cdot(y+1) \Leftrightarrow x+3y-z+4=0$$

La respuesta es c)

2. La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $F(x,y)\equiv(x-3)^2+(y+4)^2+xy-18=0$, en el punto (7, –1) es:

a) $7x+13y-36=0$. b) $y+1=-\dfrac{1}{3}(x-7)$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Parciales:

$$F_x(x,y)=2(x-3)+y; \qquad F_y(x,y)=2(y+4)+x$$

La pendiente de la recta tangente viene dada por

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2(x-3)+y}{2(y+4)+x} \rightarrow (\text{en } (7,-1)) = -\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 3+7}=-\frac{7}{13}$$

Por tanto, la recta tangente es $y+1=-\dfrac{7}{13}(x-7) \Leftrightarrow 7x+13y-36=0$

La respuesta es a)

3. La función $f(x,y)=\dfrac{x^4+pxy}{y^2-xy}$ es homogénea de grado 2:

a) Sólo si $p=0$

b) Para cualquier valor de p.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que sea homogénea de grado 2 debe cumplir que $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$.

$$f(tx,ty)=\frac{t^4x^4+ptx\cdot ty}{t^2y^2-tx\cdot ty}=\frac{t^2\left(t^2x^4+pxy\right)}{t^2\left(y^2-xy\right)}=\frac{t^2x^4+pxy}{y^2-xy}; \qquad t^2 f(x,y)=t^2\cdot\frac{x^4+pxy}{y^2-xy}$$

Ambas expresiones son iguales sólo cuando $p=0$.

La respuesta es a)

4. Dada $f(x,y)=\sqrt{100-\left(x^2+y^2\right)}$ se verifica:

a) Su dominio de definición son todos los puntos del plano $\mathbf{R}^2$.

b) La curva de nivel c = 6 es la circunferencia con centro en el origen y radio 8.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La función está definida cuando $x^2+y^2\le 100$: conjunto de los puntos del plano interiores o de frontera del círculo con centro en (0, 0) y radio 10.

La curva de nivel 6 es $f(x,y)=\sqrt{100-\left(x^2+y^2\right)}=6\Rightarrow 100-\left(x^2+y^2\right)=36\Rightarrow x^2+y^2=64$, que es la circunferencia con centro en el origen y radio 8.

La respuesta es b)

5. La derivada direccional de $f(x,y)=xe^{x^2-y}$, en el punto (–2, 4), en la dirección del vector $\vec{v}=(1,\ -1)$ vale:

a) –6. b) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f_x=e^{x^2-y}+x\cdot 2xe^{x^2-y}=e^{x^2-y}+2x^2e^{x^2-y}\ \Rightarrow\ f_x(-2,4)=e^0+2\cdot 4e^0=9$$

$$f_y=-xe^{x^2-y}\ \Rightarrow\ f_y(-2,4)=2\cdot e^0=2$$

Un vector unitario en el sentido de $\vec{v}=(1,\ -1)$ es $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Luego, $f'\left((-2,4),\vec{v}\right)=9\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$.

La respuesta es b)

6. La pendiente de la curva de nivel que pasa por el punto (2, –1), del campo $f(x,y)=\ln(xy+3)+x^2-2xy-8$, vale:

a) 5/2 b) 3 c) –5

Solución:

El punto (2, –1) está en la curva de nivel 0, pues: $f(2,-1)=\ln(-2+3)+2^2-2\cdot 2\cdot(-1)-8=0$.

Parciales:

$$f_x(x,y)=\frac{y}{xy+3}+2x-2y\ \rightarrow\ f_x(2,-1)=\frac{-1}{1}+4+2=5;$$

$$f_y(x,y)=\frac{x}{xy+3}-2x\ \rightarrow\ f_y(2,-1)=\frac{2}{1}-4=-2$$

Si la ecuación de la curva de nivel fuese $y=g(x)$, la pendiente de esa curva de nivel en el punto (2, –1) será: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x(2,-1)}{f_y(2,-1)}=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}$

La respuesta es a)

7. El módulo del vector gradiente de la función $f(x,y)=\dfrac{x}{5+x^2-xy}$, en el punto (–1, 3), vale:

a) $\sqrt{17}/81$. b) $\sqrt{10}$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f_x(x,y)=\frac{5+x^2-xy-(2x-y)x}{\left(5+x^2-xy\right)^2} \Rightarrow f_x(-1,3)=\frac{5+1+3-(-2-3)\cdot(-1)}{\left(5+1+3\right)^2}=\frac{4}{81}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2}{\left(5+x^2-xy\right)^2} \Rightarrow f_y(-1,3)=\frac{1}{81}$$

Luego: $\nabla f(-1,3)=\left(\dfrac{4}{81},\dfrac{1}{81}\right) \Rightarrow \left|\nabla f(-1,3)\right|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{81}\right)^2+\left(\dfrac{1}{81}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{81}$

La respuesta es a)

8. La dirección de máximo crecimiento del campo $f(x,y)=x^2\cos\left(x-y\right)$, en el punto (2, 2), puede venir dada por el vector:

a) (2, –2) b) (4, 1) c) (1, 0)

Solución:

$f_x(x,y)=2x\cos\left(x-y\right)-x^2\sin\left(x-y\right)$; $f_y(x,y)=x^2\sin\left(x-y\right)$;

$f_x(2,\ 2)=4\cos 0-4\sin 0=4$; $f_y(2,2)=4\sin 0=0$;

$f_x(2,\ 2)=4$; $f_y(2,2)=0 \Rightarrow \nabla f(2,\ 2)=(4,\ 0)$

La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente. Esa dirección puede venir dada por el vector (4, 0); y también por el vector (1, 0).

La respuesta es c)

9. El valor de *a* que verifica que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\frac{5}{7}$ es:

a) $a = 3$

b) $a = 7$

c) Ninguna de las anteriores, el valor de *a* debe ser: _____

Solución:

$$\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^a=-\frac{1}{a}+1 \Rightarrow -\frac{1}{a}+1=\frac{5}{7} \Rightarrow -\frac{1}{a}=-\frac{2}{7} \Rightarrow a=\frac{7}{2}$$

La respuesta es c) $a=\dfrac{7}{2}$

PROBLEMAS

P1. (2,25 puntos) Dada la función $f(x,y)=e^{x^2-y-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Dibuja la curva de nivel 1.

b) (1,25 punto) Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, –1).

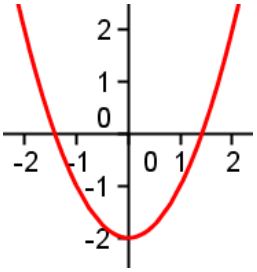
c) (0,5 puntos) Desarrolla la expresión anterior hasta su forma polinómica.

Solución:

a) La curva de nivel 1 viene dada por:

$$e^{x^2-y-2}=1 \Rightarrow x^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=x^2-2.$$

Su gráfica es la de la parábola adjunta.



b) $f_x=2xe^{x^2-y-2}$,

$$f_{xx}=2e^{x^2-y-2}+4x^2e^{x^2-y-2}; \qquad f_{xy}=-2xe^{x^2-y-2}$$

$$f_y=-e^{x^2-y-2}$$

$$f_{yx}=-2xe^{x^2-y-2}; \qquad f_{yy}=e^{x^2-y-2}$$

$\rightarrow f(1,-1)=e^{1+1-2}=1$.

Gradiente en (1, –1) $\rightarrow \nabla f(1,-1)=(2,\ -1)$.

Hessiana en (1, –1) $\rightarrow Hf(1,-1)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$P(x,y)=1+(2,\ -1)\cdot(x-1,y+1)+\frac{1}{2}(x-1,y+1)\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix}$$

c) Desarrollo de la expresión anterior:

$$P(x,y)=1+2x-2-y-1+\frac{1}{2}(6x-6-2y-2,\ -2x+2+y+1)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

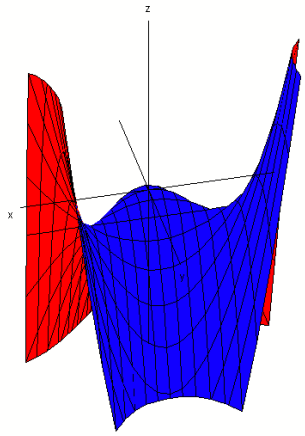
$$P(x,y)=2x-y-2+\frac{1}{2}(6x-2y-8,\ -2x+y+3)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y)=2x-y-2+\frac{1}{2}\left(6x^2-6x-2xy+2y-8x+8+\left(-2xy-2x+y^2+y+3y+3\right)\right) \Rightarrow$$

$$P(x,y)=3x^2+\frac{1}{2}y^2-2xy-6x+2y+\frac{7}{2}$$

P2. (2 puntos) Halla y clasifica los puntos estacionarios de la función

$$f(x,y) = x^2y - 2y^2 - x^2 .$$



Solución:

Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 2x = 0 \\ f_y = x^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_x = 2x(y-1) = 0 \Rightarrow x = 0; y = 1 \\ f_y = x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$; si $y = 1 \Rightarrow x = \pm 2$. Los puntos estacionarios son: (0, 0), (–2, 1) y (2, 1).

Condiciones de segundo orden:

$$\begin{cases} f_{xx} = 2y - 2; & f_{xy} = 2x \\ f_{xy} = 2x; & f_{yy} = -4 \end{cases} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & -4 \end{pmatrix}$$

Luego:

En (0, 0) $\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Definida negativa] $\rightarrow |Hf(0,0)| > 0$ y $f_{xx}(0,0) = -2 < 0 \Rightarrow$ (0, 0) es un máximo.

En (–2, 1) $\Rightarrow Hf(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Indefinida] $\rightarrow |Hf(-2,1)| < 0 \Rightarrow$ (–2, 1) es P.S.

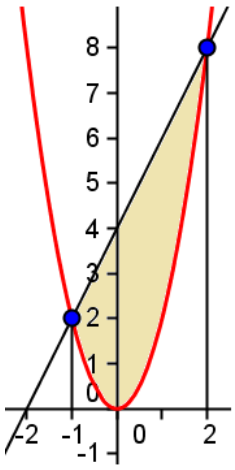
En (2, 1) $\Rightarrow Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Indefinida] $\rightarrow |Hf(2,1)| < 0 \Rightarrow$ (2, 1) es P.S.

P3. (1,25 puntos) Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación $y = 2x^2$ y la recta $y = 2x + 4$.

Solución:

La recta corta a la parábola en las soluciones del sistema: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 2 .$$



El recinto limitado por ambas gráficas es el coloreado en la figura adjunta. Su área viene dada por la integral:

$$S = \int_{-1}^{2} \left(2x + 4 - 2x^2\right) dx = \left(x^2 + 4x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 4 + 8 - \frac{16}{3} - \left(1 - 4 + \frac{2}{3}\right) = 9 \text{ u}^2.$$