DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
Examen Final (1ª y 2ª parte) de Análisis Matemático 21-Mayo-2015 GRADOS ECO y ENI
NOMBRE: D.N.I. TURNO:

TEST → 4.5 PUNTOS (Cada pregunta contestada correctamente suma 0,5 puntos, y contestada erróneamente resta 0,2 puntos.)

1. El sistema $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y+\lambda z=0 \\ x+\lambda y-\lambda z=2 \end{cases}$ tiene solución única:
a) Si $\lambda \neq 0$. b) Si $\lambda = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

2. La función $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$ verifica que:
a) Tiene un máximo y un mínimo.
b) Tiene dos puntos de inflexión.
c) Decrece para $x > 3$.

3. Los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, k)$ y $\vec{v}_3 = (1, -k, k+2)$ cumplen:
a) Forman base de $\mathbf{R}^3$ para todo valor de $k \neq 0$.
b) Son linealmente dependientes para $k = -2$.
c) $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ nunca pueden ser ortogonales.

4. Las matrices P que conmutan con $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma:
a) $P=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ b) $P=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$
c) Ninguna de las anteriores, la matriz P debe ser:

5. Si A es una matriz cuadrada de dimensión 3 × 3 cuyo determinante vale 2, entonces los determinantes de $-3A$ y el de A^{-1}, $\left(|-3A|;\ |A^{-1}|\right)$, vale, respectivamente:
a) –6 y –2.
b) –54 y 1/2.
c) Ninguna de las anteriores; sus valores respectivos son: _____.

6. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $F(x,y) \equiv (x-3)^2+(y+4)^2+xy-18=0$, en el punto (7, –1) es:
a) $7x+13y-36=0$. b) $y+1=-\dfrac{1}{3}(x-7)$.
c) Ninguna de las anteriores.

7. La función $f(x,y)=\dfrac{x^4+pxy}{y^2-xy}$ es homogénea de grado 2:
a) Sólo si $p = 0$
b) Para cualquier valor de p.
c) Ninguna de las anteriores.

8. La derivada direccional de $f(x,y)=xe^{x^2-y}$, en el punto (–2, 4), en la dirección del vector $\vec{v}=(1,\ -1)$ vale:
a) –6. b) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$.
c) Ninguna de las anteriores**.**

9. El valor de a que verifica que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2}dx=\frac{5}{7}$ es:
a) $a = 3$ b) $a = 7$
c) N. A., el valor de a debe ser: _____

PROBLEMAS → 5,5 PUNTOS

P1. (2 puntos) Diagonaliza la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, calculando las matrices D_A (matriz diagonal), P_A (matriz de paso).

P2. Dada la función $f(x,y)=e^{x^2-y-2}$, se pide:
a) (0,5 puntos) Dibuja la curva de nivel 1.
b) (1 punto) Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, –1).
c) (0,5 puntos) Desarrolla la expresión anterior hasta su forma polinómica.

P3. (1,5 puntos) Halla y clasifica los puntos estacionarios de la función

$$f(x,y)=x^2y-2y^2-x^2$$

SOLUCIONES

TEST

1. El sistema $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y+\lambda z=0 \\ x+\lambda y-\lambda z=2 \end{cases}$ tiene solución única:

a) Si $\lambda \neq 0$. b) Si $\lambda = -1$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, respectivamente, son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & -\lambda & 2 \end{array}\right)=M \,.\, |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2+3\lambda-2\lambda-1=-(\lambda-1)^2$$

Este determinante vale 0 si $\lambda = 1$.

- Si $\lambda = 1$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)=M$. El rango de A es 2 y el rango de M es 3: el sistema será incompatible.

La respuesta no puede ser, pues $\lambda = 1$ no vale.

La respuesta es b)

2. La función $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$ verifica que:

a) Tiene un máximo y un mínimo.

b) Tiene dos puntos de inflexión.

c) Decrece para $x > 3$.

Solución:

Dominio: Dom(f) = **R** – {3}.

Derivando:

$$f'(x)=\frac{2x(2x-6)-x^2\cdot 2}{(2x-6)^2}=\frac{2x^2-12x}{(2x-6)^2}=\frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}$$

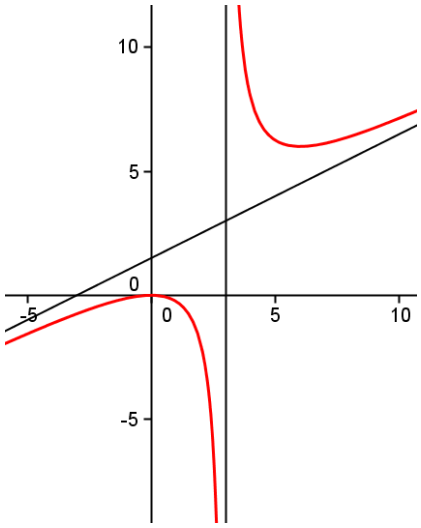
La derivada se anula en $x = 0$ y en $x = 6$. Con esto:

Si $x < 0$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si $0 < x < 3$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si $3 < x < 6$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si $x > 6$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.



Como la función crece a la izquierda del 0 y decrece a su derecha, en $x = 0$ se da un máximo.

De manera análoga se deduce que en $x = 6$ se da un mínimo.

La gráfica de la función es la representada a la derecha. (No es necesario hacerla).

Si se desea seguir derivando: $f''(x)=\dfrac{72}{(2x-6)^3}$

$\rightarrow$ Cumple que $f''(0) < 0$ y $f''(6) > 0$. Se confirma lo dicho para máximo y mínimo.
$\rightarrow$ No se anula en ningún punto de su dominio $\Rightarrow$ no hay P. I.
La respuesta es a)

3. Los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, k)$ y $\vec{v}_3 = (1, -k, k + 2)$ cumplen:
c) Forman base de $\mathbf{R}^3$ para todo valor de $k \neq 0$.
d) Son linealmente dependientes para $k = -2$.
c) $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ nunca pueden ser ortogonales.
Solución:
Los vectores no forman base cuando son linealmente dependientes; para ello, el determinante asociado debe ser 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -k & k+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 5k + 4 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ o } k = -4$$

No se cumple a) ni b).
Veamos c):

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (2, 1, k) \cdot (1, -k, k + 2) = k^2 + k + 2$, que nunca puede vale 0.

La respuesta es c)

4. Las matrices P que conmutan con $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma:

a) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$

c) Ninguna de las anteriores, la matriz P debe ser:
Solución:

Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2a+b \\ -c & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -a+2c = -a & \rightarrow c = 0; a = a \\ -c = c & \rightarrow c = 0 \\ -b+2d = 2a+b & \rightarrow d = a+b \\ d = 2c+d & \rightarrow d = d \end{cases} \Rightarrow \text{La matriz } P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

La respuesta es a)

5. Si A es una matriz cuadrada de dimensión 3 × 3 cuyo determinante vale 2, entonces los determinantes de $-3A$ y el de A^{-1}, $\left(|-3A|;\ |A^{-1}|\right)$, vale, respectivamente:

a) –6 y –2. b) –54 y 1/2.
c) Ninguna de las anteriores; sus valores respectivos son: _____.
Solución:
Por las propiedades de los determinantes se tiene:

- $|-3A| = (-3)^3 |A| = -27 \cdot 2 = -54$.
- $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}$.

La respuesta es b)

6. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $F(x,y) \equiv (x-3)^2 + (y+4)^2 + xy - 18 = 0$, en el punto (7, –1) es:

a) $7x + 13y - 36 = 0$. b) $y + 1 = -\frac{1}{3}(x-7)$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Parciales:

$$F_x(x,y) = 2(x-3) + y; \qquad F_y(x,y) = 2(y+4) + x$$

La pendiente de la recta tangente viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2(x-3)+y}{2(y+4)+x} \to (\text{en } (7,-1)) = -\frac{2\cdot 4 - 1}{2\cdot 3 + 7} = -\frac{7}{13}$$

Por tanto, la recta tangente es $y + 1 = -\frac{7}{13}(x-7) \Leftrightarrow 7x + 13y - 36 = 0$

La respuesta es a)

7. La función $f(x,y) = \frac{x^4 + pxy}{y^2 - xy}$ es homogénea de grado 2:

a) Sólo si $p = 0$

b) Para cualquier valor de p.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que sea homogénea de grado 2 debe cumplir que $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$.

$$f(tx,ty) = \frac{t^4x^4 + ptx\cdot ty}{t^2y^2 - tx\cdot ty} = \frac{t^2\left(t^2x^4 + pxy\right)}{t^2\left(y^2 - xy\right)} = \frac{t^2x^4 + pxy}{y^2 - xy}; \qquad t^2 f(x,y) = t^2\cdot\frac{x^4 + pxy}{y^2 - xy}$$

Ambas expresiones son iguales sólo cuando $p = 0$.

La respuesta es a)

8. La derivada direccional de $f(x,y) = xe^{x^2-y}$, en el punto (–2, 4), en la dirección del vector $\vec{v} = (1,\ -1)$ vale:

a) –6. b) $\frac{7}{\sqrt{2}}$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f_x = e^{x^2-y} + x\cdot 2xe^{x^2-y} = e^{x^2-y} + 2x^2e^{x^2-y} \Rightarrow f_x(-2,4) = e^0 + 2\cdot 4e^0 = 9$$

$$f_y = -xe^{x^2-y} \Rightarrow f_y(-2,4) = 2\cdot e^0 = 2$$

Un vector unitario en el sentido de $\vec{v} = (1,\ -1)$ es $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Luego, $f'((-2,4),\vec{v}) = 9\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

La respuesta es b)

9. El valor de a que verifica que $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \frac{5}{7}$ es:

a) $a = 3$
b) $a = 7$
c) Ninguna de las anteriores, el valor de a debe ser: _____

Solución:

$$\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = -\frac{1}{a}+1 \Rightarrow -\frac{1}{a}+1=\frac{5}{7} \Rightarrow -\frac{1}{a}=-\frac{2}{7} \Rightarrow a=\frac{7}{2}$$

La respuesta es c) $a = \frac{7}{2}$

PROBLEMAS

P1. (2 puntos) Diagonaliza la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, calculando las matrices D_A (matriz diagonal), P_A (matriz de paso).

Solución:

Ecuación característica:

$$\rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ -5 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-4-\lambda)+8\right]=0 \Rightarrow (1-\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot\lambda = 0$$

Autovalores: $\lambda = 1$; $\lambda = -2$; $\lambda = 0$.

Los tres autovalores son simples $\Rightarrow$ la matriz es diagonalizable.

- Si $\lambda = 1$,

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y+4z=0 \\ -5x-2y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases} \rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = -2$,

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ 4x+4y+4z=0 \\ -5x-2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 0$,

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x+2y+4z=0 \\ -5x-2y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=-t \end{cases} \rightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

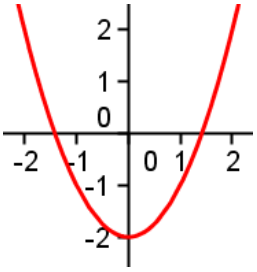
La matriz $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de paso es: $P_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(La inversa no se pide).

P2. Dada la función $f(x,y)=e^{x^2-y-2}$, se pide:
a) (0,5 puntos) Dibuja la curva de nivel 1.
b) (1 punto) Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, –1).
c) (0,5 puntos) Desarrolla la expresión anterior hasta su forma polinómica.
Solución:
a) La curva de nivel 1 viene dada por:

$$e^{x^2-y-2}=1 \Rightarrow x^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=x^2-2.$$

Su gráfica es la de la parábola adjunta.



b) $f_x=2xe^{x^2-y-2}$,

$$f_{xx}=2e^{x^2-y-2}+4x^2e^{x^2-y-2}; \qquad f_{xy}=-2xe^{x^2-y-2}$$

$$f_y=-e^{x^2-y-2}$$

$$f_{yx}=-2xe^{x^2-y-2}; \qquad f_{yy}=e^{x^2-y-2}$$

$\rightarrow f(1,-1)=e^{1+1-2}=1$.

Gradiente en (1, –1) $\rightarrow \nabla f(1,-1)=(2,\ -1)$.

Hessiana en (1, –1) $\rightarrow Hf(1,-1)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$P(x,y)=1+(2,\ -1)\cdot(x-1,y+1)+\frac{1}{2}(x-1,y+1)\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix}$$

c) Desarrollo de la expresión anterior:

$$P(x,y)=1+2x-2-y-1+\frac{1}{2}(6x-6-2y-2,\ -2x+2+y+1)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P(x,y)=2x-y-2+\frac{1}{2}(6x-2y-8,\ -2x+y+3)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

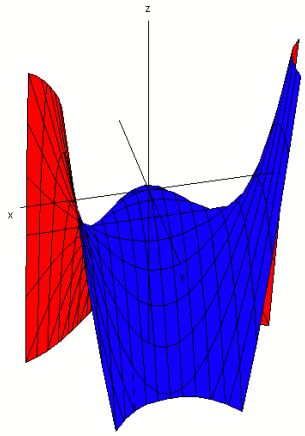
$$P(x,y)=2x-y-2+\frac{1}{2}\left(6x^2-6x-2xy+2y-8x+8+\left(-2xy-2x+y^2+y+3y+3\right)\right) \Rightarrow$$

$$P(x,y)=3x^2+\frac{1}{2}y^2-2xy-6x+2y+\frac{7}{2}$$

P3. (1.5 puntos) Halla y clasifica los puntos estacionarios de la función

$$f(x,y) = x^2 y - 2y^2 - x^2 .$$

Solución:



Condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 2x = 0 \\ f_y = x^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_x = 2x(y-1) = 0 \Rightarrow x = 0; y = 1 \\ f_y = x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

S $x = 0 \Rightarrow y = 0$; si $y = 1 \Rightarrow x = \pm 2$.

Los puntos estacionarios son: (0, 0), (–2, 1) y (2, 1).

Condiciones de segundo orden:

$$\begin{cases} f_{xx} = 2y - 2; & f_{xy} = 2x \\ f_{xy} = 2x; & f_{yy} = -4 \end{cases} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & -4 \end{pmatrix}$$

Luego:

En (0, 0) $\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Definida negativa] $\rightarrow |Hf(0,0)| > 0$ y $f_{xx}(0,0) = -2 < 0 \Rightarrow$ (0, 0) es un máximo.

En (–2, 1) $\Rightarrow Hf(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Indefinida] $\rightarrow |Hf(-2,1)| < 0 \Rightarrow$ (–2, 1) es P.S.

En (2, 1) $\Rightarrow Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$ [Indefinida] $\rightarrow |Hf(2,1)| < 0 \Rightarrow$ (2, 1) es P.S.