Tema 14. Probabilidad Resumen

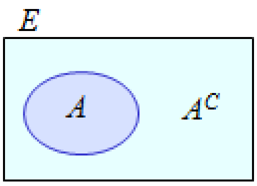
Experimentos aleatorios

Un experimento se llama aleatorio cuando no se puede predecir su resultado; además, si se repitiese el mismo experimento en condiciones análogas, los resultados pueden diferir.
Los experimentos aleatorios pueden ser simples o compuestos.
(Los experimentos en los que puede predecirse el resultado se llaman deterministas. Si uno de estos experimentos se repite con idénticas condiciones, el resultado es el mismo).

Ejemplos:
a) Es aleatorio cualquier juego de azar: el lanzamiento de una moneda, de un dado o la extracción de una carta en una baraja; la lotería...
Lanzar un dado con las caras numeradas y apuntar el número que se sale es un experimento simple. Lanzar dos dados y apuntar sus resultados sería compuesto.
b) Es determinista averiguar el tiempo que tarda en llegar al suelo una pelota que se deja caer desde una altura de 10 metros; o con qué velocidad impactará.

Espacio muestral

Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio; suele designarse por la letra *E*.
Un suceso es todo subconjunto de *E*. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas.
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por *E*, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por $\varnothing$: no ocurre nunca.
Suceso contrario de *A*, que se denota por A^C o $\overline{A}$, es el suceso que se verifica cuando no se cumple *A*. Está formado por los sucesos elementales que no son de *A*; es el subconjunto complementario de *A*, respecto a *E*. Por tanto, si ocurre A^C no ocurre *A*, y viceversa.
Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos.



Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente, con las caras numeradas, son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}. Así pues, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": $P = \{2, 4, 6\}$. El suceso *P* se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar".

b) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).
En este experimento se pueden considerar los sucesos: *B* = "obtener una carta de bastos" y *F* = "obtener una figura", se tiene:
→ suceso *B*: está formado por las 10 cartas de bastos,
$B = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$,
donde S_B, C_B y R_B denotan las figuras sota, caballo y rey de bastos, respectivamente; el subíndice B indica bastos.
→ suceso *F*: está formado por las 12 cartas que son figuras, 3 de cada uno de los *palos*,
$F = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$,
donde los subíndices O, C, E y B indican oros, copas, espadas y bastos, respectivamente.

Probabilidad: definiciones y propiedades

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado. La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso.

→ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

Ejemplo:

a) Si se pregunta a 400 personas, elegidas al azar, sobre la práctica del deporte y, de ellas, 125 afirman practicar algún tipo de deporte, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo practique algún deporte es de $\frac{125}{400}=0,3121$.

b) Si una moneda se lanza 1500 veces y en 720 ocasiones ha salido cara, se admitirá que la probabilidad de obtener cara para esa moneda es $P(C)=\frac{720}{1500}=0,48$ → (sospecharemos que esa moneda está trucada o mal construida).

Regla de Laplace

Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso *A* se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplos:

a) Si en una bolsa hay 5 bolas de color verde (*V*) y 3 de color rojo (*R*), todas de igual peso y tamaño, la probabilidad de extraer al azar una bola verde o una bola roja es:

$$P(V)=\frac{5}{8}\text{; } P(R)=\frac{3}{8}.$$

b) En el experimento de extraer una carta de una baraja española, se tienen las siguientes probabilidades:

→ De obtener una carta de bastos: $P(B)=\frac{10}{40}=0,25$.

→ De obtener una figura: $P(F)=\frac{12}{40}=0,3$. (Hay 12 figuras entre las 40 cartas).

→ De NO obtener una carta de bastos: $P\left(\overline{B}\right)=\frac{30}{40}=0,75$. ($P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=1-\frac{10}{40}=\frac{30}{40}=0,75$).

→ De obtener una figura de bastos: $P(F)=\frac{3}{40}=0,3$. (Hay 3 figuras de bastos entre las 40 cartas).

c) El espacio muestral asociado al experimento compuesto, consistente en el lanzamiento de dos monedas equilibradas y observar sus resultados es: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$.

Los sucesos posibles son: 2 caras, $\{CC\}$; 2 cruces, $\{XX\}$; 1 cara y 1 cruz, $\{CX, XC\}$. Con esto, las probabilidades de obtener 2 caras, 2 cruces o 1 cara y 1 cruz serán:

$$P(CC)=\frac{1}{4};\ P(XX)=\frac{1}{4};\ P(CX,XC)=\frac{2}{4}.$$

Técnicas de recuento

La asignación de la probabilidad de un suceso, mediante la regla de Laplace, exige conocer el número de casos totales que pueden darse en el experimento y el número de casos favorables a dicho suceso. Hay varias técnicas de recuento que facilitan esos cálculos; aquí veremos el principio multiplicativo.

Principio multiplicativo

Es el método básico de recuento. Se enuncia como sigue: "Si un suceso puede darse de *m* maneras distintas en primera opción y a continuación puede suceder de *n* modos diferentes, entonces tiene $m \times n$ maneras de suceder".

Por tanto, para contar el número de casos hay que determinar cuántas elecciones hay que hacer y cuántas opciones hay en cada elección sucesiva.

Ejemplos:

a) Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, puede vestirse de $5 \times 4 = 20$ formas diferentes.

b) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar, por ejemplo, números de cuatro cifras, repetidas o no. El número 0005 se considera de 4 cifras; igualmente 0126; y naturalmente, 7603 o 5555.

$\rightarrow$ Si no puede repetirse ningún dígito, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, 9 opciones (elegido un dígito, el siguiente puede ser cualquiera de los 9 restantes); en la tercera, 8; y en la cuarta 7. En total, los números de 4 cifras no repetidas son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$.

$\rightarrow$ Si pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, los mismos 10; así como en la tercera y cuarta elección, sigue habiendo 10 opciones. En total, los números de 4 cifras con dígitos, repetidos o no, son $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.

c) Si se lanza una moneda 4 veces consecutivas y se observa la secuencia de resultados (cara, cruz), como en cada lanzamiento hay 2 opciones, el número total de secuencias posibles será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. (Este experimento es equivalente a lanzar 4 monedas a la vez y observar el resultado).

Asignación de probabilidades a partir de una tabla

En algunas ocasiones se da la información de un suceso mediante una tabla de datos. En estos casos, la asignación de probabilidades puede resultar muy sencilla.

Ejemplo:

En un centro escolar, la distribución de los alumnos de 2º de ESO, por sexo y grupo, se da en la tabla adjunta.

A partir de esos datos, si se elige al azar, un alumno o alumna de 2º de ESO, se pueden asignar las siguientes probabilidades:

Grupo	2º A	2º B	2º C	Totales
Chicas (*M*)	14	12	13	39
Chicos (*H*)	12	13	11	36
Total	26	25	24	75

$\rightarrow$ De que sea chico (suceso *H*): $P(H) = \frac{36}{75} = 0,48$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 36 son chicos.

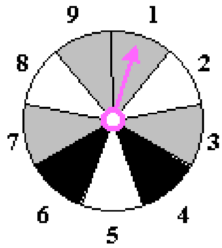
$\rightarrow$ De que sea de 2º C: $P(2^{\circ}\text{C}) = \frac{24}{75} = 0,32$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 24 son de 2º C.

$\rightarrow$ De que sea una chica de 2º C: $P(M \text{ y } 2^{\circ}\text{C}) = \frac{13}{75} \approx 0,1733$. Hay 75 alumnos en total; de ellos, 13 son chicas de 2º C.

$\rightarrow$ De que sea una chica si se sabe que es de 2º C: $P(M \text{ si es de } 2^{\circ}\text{C}) = \frac{13}{24} \approx 0,5417$. Hay 24 alumnos/as de 2º C; de ellos, 13 son chicas.

Ejercicios y Problemas

1. Indica cuál de los siguientes experimentos es aleatorio.
a) Lanzar tres monedas y apuntar el número de caras que salen.
b) Dejar caer una piedra desde 5 metros y decir con qué velocidad llegará al suelo.
c) El día de la semana en que caerá el 12 de julio del año 2031.
d) El remitente del próximo mensaje de WhatsApp que recibiré.



2. Se gira la aguja de la ruleta y se observa el número del sector dónde se para.
a) Describe el espacio muestral asociado.
b) ¿Cuántos sucesos elementales forman cada uno de los sucesos: B = "blanco"; G = "gris"; N = "negro?
c) Describe los sucesos contrarios de los sucesos B, G y N.
d) ¿Cuál es el suceso seguro? Indica un suceso imposible

3. Si la ruleta está bien construida, cada uno de los números tiene la misma probabilidad de salir. Con esto, calcula la probabilidad de que la aguja se pare en cada uno de los colores blanco, gris o negro; y la probabilidad de sus respectivos contrarios.

4. Para la misma ruleta, indica los sucesos elementales que forman los sucesos:
a) D = "El número obtenido es par".
b) M = "El número obtenido es múltiplo de 3".
c) El suceso contrario de cada uno de los sucesos anteriores.
d) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

5. Al extraer una carta de una baraja española de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea:
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura. d) Sota o caballo.

6. Se lanza una moneda tres veces y se observa el número de caras y cruces que salen.
a) Forma el espacio muestral de los resultados.
b) ¿Por cuántos resultados elementales está formado el suceso "dos caras y una cruz"?
c) ¿Son equiprobables los sucesos sacar "tres caras" y sacar "dos caras y una cruz"? ¿Cuánto vale la probabilidad de cada uno de esos dos sucesos?
d) ¿Cuál es la probabilidad de aparezca al menos una cruz?

→ Teniendo en cuenta el principio multiplicativo, como en cada lanzamiento hay 2 opciones, el número total de resultados será $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. (Este experimento es equivalente a lanzar 3 monedas a la vez y observar el resultado).
a) Llamando C al suceso cara y X al suceso cruz, de acuerdo con el orden de aparición de uno u otro suceso, se tiene que: $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$.
b) El suceso "dos caras y una cruz" es $\{CCX, CXC, XCC\}$ → tres resultados favorables.
c) El suceso "3 caras" está formado por un solo suceso elemental: $\{CCC\}$.
Por tanto: $P(\text{3 caras}) = \frac{1}{8}$; $P(\text{2 caras y 1 cruz}) = \frac{3}{8}$.

d) Hay 7 casos en los que aparece alguna cruz. Por tanto, $P(\text{al menos 1 cruz}) = \frac{7}{8}$.

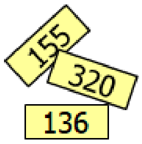
Observa que "al menos una cruz" es el suceso contrario de las tres son caras; por tanto, aplicando la propiedad de la probabilidad del suceso contrario, $P(\text{ninguna cruz}) = 1 - P(CCC) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

7. Se lanzan cuatro monedas y se observa el número de caras y cruces que salen.
a) ¿Cuántos sucesos elementales forman el espacio muestral?
b) ¿En cuántos casos aparecen 1 cara y 3 cruces? ¿Cuál será la probabilidad de ese suceso?
c) ¿En cuántos casos no aparece ninguna cruz? ¿Cuál es la probabilidad de aparezca al menos una cara?

8. Una urna contiene bolas del mismo peso y tamaño pintadas de distintos colores: 3 amarillas, 5 rojas y 6 verdes. Si se extrae una bola al azar:
a) Determina el espacio muestral.
b) Son equiprobables los sucesos extraer "bola amarilla", "bola roja" o "bola verde".
c) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída no sea roja?

9. Si se lanzan a la vez una moneda y un dado:
a) Describe el espacio muestral de resultados.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y un número múltiplo de 3?

10. En una urna se tienen mil papeletas numeradas (de 000 a 999). Si se elige una de ellas al azar, calcula la probabilidad de el número obtenido:
a) Termine en 5. b) Termine en 55.
c) Sea mayor que 300. d) Sea múltiplo de 20.



11. Teniendo en cuenta el principio multiplicativo.
Si se elige un número de cuatro cifras al azar, halla la probabilidad de que dicho número:
a) No tenga cifras repetidas (suceso *A*).
b) Ninguna de sus cifras sea 0 (suceso *B*).
c) Termine en 7 (suceso *C*).
d) Comience por 23 (suceso *D*).

→ a) Hay 10000 números de 4 cifras; de ellos, <u>5040</u> (10 · 9 · 8 · 7 = <u>5040</u>) no tienen repetida ninguna cifra; luego,

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos}}=\frac{5040}{10000}=0,504.$$

b) Si ninguna de las cifras puede ser 0, entonces, cada una de las 4 cifras debe elegirse entre los 9 dígitos restantes. En total, los casos sin la cifra 0, serán 9 · 9 · 9 · 9 = 6561.

Luego: $P(B)=\frac{6561}{10000}=0,6561$.

c) Uno de cada 10 números termina en 7, luego $P(C)=\frac{1}{10}=0,1$.

d) Hay 100 números de 4 cifras que empiezan por 23: 2300, 2301, 2302…, 2399.

Luego, $P(D)=\frac{100}{10000}=0,01$.

12. Teniendo en cuenta el principio multiplicativo.
Si se elige un número de cuatro cifras al azar, halla la probabilidad de que dicho número:
a) Tenga alguna cifra repetida (suceso *A*).
b) No tenga ni el 0 ni el 9 (suceso *B*).
c) Termine en 07 (suceso *C*).

13. En una bolsa hay bolas del mismo peso y tamaño pintadas de distintos colores: 6 negras y 4 blancas. Se extraen al azar dos bolas, una detrás de otra. Teniendo en cuenta el principio multiplicativo, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las dos bolas extraídas son negras.
b) Las dos bolas extraídas son blancas.
c) Las dos bolas extraídas son de distinto color.

→ La primera bola extraída puede ser cualquiera de las 10 que hay en la bolsa (6 *n* + 4 *b*); la segunda será cualquiera de las 9 que queden. Luego, el total de casos posibles será 10 · 9 = 90.
a) Las dos bolas son negras (suceso *nn*) si la primera es negra (hay 6 *n*) y la segunda es negra (si la primera ha sido *n*, quedarán 5 *n*). Por tanto, los casos favorables al suceso *nn* serán 6 · 5 = 30.
Luego, $P(nn)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$.
b) Las dos bolas serán blancas (suceso *bb*) si la primera es blanca (hay 4 *b*) y la segunda también es blanca (si la primera ha sido *b*, quedarán 3 *b*). Por tanto, los casos favorables al suceso *bb* serán 4 · 3 = 12.
Luego, $P(bb)=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.
c) Hay 30 casos favorables a *nn*, 12 casos favorables a *bb*; luego, el resto de los casos, 90 – 30 – 12 = 48, serán bolas de distinto color, *bn* o *nb*. Luego, $P(nb,bn)=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$.

14. En una bolsa hay bolas del mismo tamaño pintadas de distintos colores: 2 negras y 3 blancas. Se extraen al azar dos bolas, una detrás de otra. Teniendo en cuenta el principio multiplicativo, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las dos bolas extraídas son negras.
b) Las dos bolas extraídas son blancas.
c) Las dos bolas extraídas son de distinto color.

15. Los alumnos de 1º y 2º de ESO de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla, aunque hay números borrados:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º ESO	65		135
2º ES0		62	
Total		132	252

a) Completa los números que faltan.
b) Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
A = “sea una chica”; *B* = “sea de 2º de ESO”;
C = “sea una chica de 2º de ESO”; *D* = “sea un chico de 1º de ESO”;
F = “sea chica si es de 2º de ESO”; *G* = “sea de 2º de ESO si es chica”.

Soluciones:
1. Aleatorios: a) y d). Deterministas: b) y c)
2. a) *E* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. b) *B* = {2, 5, 8}; *G* = {1, 3, 7, 9}; *N* = {4, 6}.
c) $\overline{B}$ = {1, 3, 4, 6, 7, 9}; $\overline{G}$ = {2, 4, 5, 6, 8}; $\overline{N}$ = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9}.
d) Seguro: “Se para en un número entre el 1 y el 9”. Imposible: “Se para en el número 0”.
3. $P(B)=\frac{3}{9}$; $P(G)=\frac{4}{9}$; $P(N)=\frac{2}{9}$; $P(\overline{B})=1-\frac{3}{9}=\frac{6}{9}$; $P(\overline{G})=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$; $P(\overline{N})=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

4. a) D = {2, 4, 6, 8}. b) M = {3, 6, 9}. c) A^C = {1, 3, 5, 7, 9}; B^C = {1, 2, 4, 5, 7, 8}.
d) $P(D)=\frac{4}{9}$; $P(M)=\frac{3}{9}$; $P(\overline{D})=\frac{5}{9}$; $P(\overline{M})=\frac{6}{9}$.

5. a) P(Rey) = 4/40. b) P(Rey de copas) = 1/40. c) P(No figura) = 28/40.
d)) P(Sota o caballo) = 8/40.

7. a) 2 · 2 · 2 · 2 = 16. b) A = {1C y 3X} = {$CXXX$, $XCXX$, $XXCX$, $XXXC$}. $P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.
c) En todos los que no son {$CCCC$}; en los otros 15 sucesos elementales aparecerá al menos una cruz, suceso B $\to$ $P(B)=1-P(CCCC)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

8. a) E = {amarilla, roja, verde}. b) No son equiprobables, pues cada suceso está compuesto por un número distinto de sucesos elementales.
c) P(amarilla) = $\frac{3}{14}$; P(roja) = $\frac{5}{14}$; P(verde) = $\frac{6}{14}$. d) P(no roja) = $\frac{9}{14}$.

9. a) E = {(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)}.
b) $P((3,C);(6,C))=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

10. a) Uno de cada 10 números termina en 5 (005, 015, 025…) $\to$ P(termine en 5) = $\frac{1}{10}$.
b) Uno de cada 100 números termina en 55 (055, 155, 255…) $\to$ P(termine en 55) = $\frac{1}{100}$.
c) P(mayor de 300) = $\frac{699}{1000}$.
d) Uno de cada 20 números es múltiplo de 20 (0, 20, 40, 60…) $\to$ P(múltiplo de 20) = $\frac{1}{100}$.

12. a) Hay 10000 números de 4 cifras; de ellos, <u>5040</u> no tienen repetida ninguna cifra; luego, el resto, 10000 – 5040 = 4960, tendrán alguna cifra repetida. Por tanto, $P(A)=\frac{4960}{10000}=0,496$.
b) En total, los casos sin el 0 ni el 9, son 8 · 8 · 8 · 8 = 4096 $\to$ $P(B)=\frac{4096}{10000}=0,4096$.
c) Uno de cada 100 números termina en 07, luego $P(C)=\frac{1}{100}=0,01$.ç

14. a) $P(nn)=\frac{1}{10}$. b) $P(bb)=\frac{3}{10}$. c) $P(nb,bn)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

15. a) Como en 1º de ESO hay un total de 135 alumnos, el número de chicas es: 135 – 65 = 70.
Como el total de alumnos de 1º y 2º es de 252, en 2º habrá: 252 – 135 = 117.
Los chicos de 2º deben ser: 117 – 62 = 55.
Y el total de chicos entre 1º y 2º: 65 + 55 = 120.
Con esto, la tabla completa es:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º ESO	65	70	135
2º ES0	55	62	117
Total	120	132	252

b) P(Chica) = $\frac{132}{252}$; P(2º de ESO) = $\frac{117}{252}$;
P(Chica de 2º) = $\frac{62}{252}$; P(Chico de 3º) = $\frac{65}{252}$.