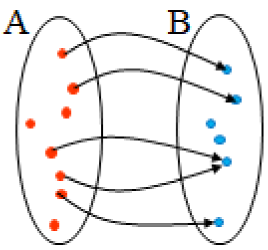
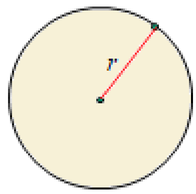
Tema 12. Funciones **Resumen**

Definición de función



Una función es una relación entre dos magnitudes (entre dos conjuntos), de manera que a cada elemento de un conjunto (A) le corresponde un único elemento de otro conjunto (B).
No todo elemento del primer conjunto (A) tiene correspondiente, pero si lo tiene debe ser único. Un elemento de B puede ser el correspondiente de varios elementos de A.

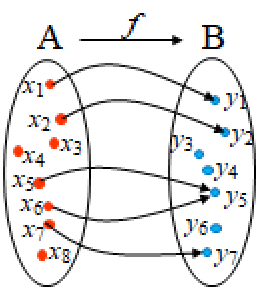
Ejemplos:
a) La relación “a cada número natural le corresponde su siguiente” es una función. Esta función asocia, por ejemplo, a 2 → 3; a 9 → 10. En general, a $n \to n + 1$.(Es una función de **N** en **N**).
Esta relación es una función porque para todo número natural siempre existe el siguiente y es único.
b) La relación “a cada número natural le corresponde un múltiplo” NO es una función, pues un número tiene infinitos múltiplos. Esta relación asocia, por ejemplo, a 5 → 10, 15, … 50… No es una correspondencia única.



c) La relación “a cada círculo se le asocia su área” es una función: el área de cada círculo es única y depende de su radio. Esta función se describe con la fórmula: $A = \pi \cdot r^2$. Así, si un círculo tiene radio 3 cm, su área es $A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm^2.
d) La relación “a cada número le corresponde su inverso” es una función, salvo que ese número sea 0. Esta función asocia, por ejemplo, a 4 → 1/4; a –3 → –1/3.
En general, a $x \to \frac{1}{x}$. Para simplificar se puede escribir mediante la fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$.
e) La relación “a cada número se le asocia su cuadrado” es una función. Esta función asocia, por ejemplo, a $4 \to 4^2 = 16$; a $-3 \to (-3)^2 = 9$; a $3 \to 3^2 = 9$. –1/3. Esta función puede escribirse mediante la fórmula $f(x) = x^2$.

Por tanto, en una función:

- Intervienen dos variables, una independiente (la del primer conjunto) y otra dependiente, que es del segundo conjunto. Esos conjuntos se llaman inicial y final, respectivamente. (Los conjuntos pueden ser el mismo: de A en A, por ejemplo; de **N** en **N**… En Matemáticas, las funciones suelen definirse entre números reales: a un número real se le asocia otro número real, **R** → **R**).



- La variable independiente suele designarse por la letra *x*; la dependiente suele llamarse *y*. Su relación suele darse mediante una fórmula: $y = f(x)$. (Pueden utilizarse otras letras, como se ha hecho en los ejemplos anteriores: $y = f(n) = n + 1$; $A = f(r) = \pi \cdot r^2$).
- El conjunto de valores que puede tomar *x* (la variable independiente) es el conjunto dominio (Dom). En la figura, $\text{Dom}(f) = \{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$.
El conjunto de valores que toma *y* (la variable dependiente) se llama recorrido o imagen (Rec). En la figura, $\text{Rec}(f) = \{y_1, y_2, y_5, y_7\}$.
- Los elementos mutuamente relacionados pueden escribirse en forma de par, (*x*, *y*), entendiendo que a *x* le corresponde *y*: $x \to y$. Esto implica que una función pueda darse como un conjunto de pares; así: $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ... (x_n, y_n)\}$.
En la figura, $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_5, y_5), (x_6, y_5), (x_7, y_7)\}$. Los elementos x_5 y x_6 tienen la misma imagen: $f(x_5) = f(x_6) = y_5$.
El par (x_6, y_6), por ejemplo, no pertenece a la función *f*, pues $f(x_6) = y_5 \neq y_6$.

Modos de dar una función

Una función puede darse mediante un enunciado, una fórmula, una tabla (conjunto de pares) o una gráfica.

Ejemplos:

a) Mediante un enunciado: "a cada número real le corresponde su mitad".

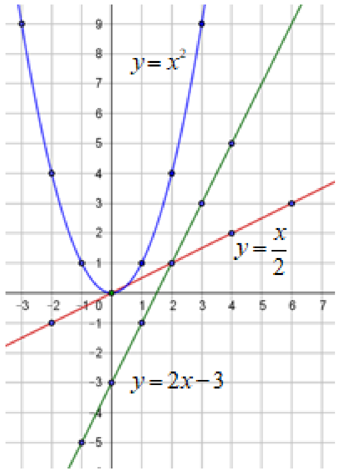
b) Mediante una fórmula: $y = 2x - 3$; $y = x^2$. (La del ejemplo a) es $y = \frac{x}{2}$).

c) Mediante una tabla:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

Los pares son: (–2, –7); (–1, –5); (0, –3); (1, –1), (2, 1); …

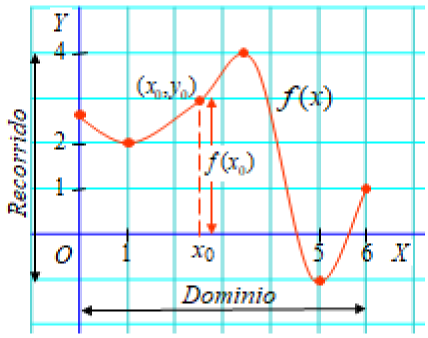
d) Mediante una gráfica: se obtiene representado algunos puntos y uniéndolos mediante una línea.



En la figura de la derecha se representan $y = 2x - 3$, $y = x^2$ e $y = \frac{x}{2}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^2$	4	1	0	1	4	9	...

- Cuando una función se da mediante una gráfica todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función. Para cada punto (x_0, y_0) de la gráfica, y_0 es la imagen de x_0; esto es, $y_0 = f(x_0)$.



En la figura, $f(1) = 2$ y $f(5) = -1$; puntos (1, 2) y (5, –1).

El dominio lo forman todos los valores *x*, del eje *OX*, que tienen correspondiente. Es el intervalo [0, 6].

El recorrido lo forman todos los valores *y*, del eje *OY*, que son imágenes de algún *x* del dominio. Es el intervalo [–1, 4].

Funciones lineales

Son aquellas cuya gráfica es una línea recta. Su expresión general es $y = mx + n$, donde *m* y *n* toman valores numéricos.

- Cuando *m* = 0, la función es constante: queda $y = n$, cuya gráfica es una recta horizontal.
- Cuando *n* = 0 , la función se llama de proporcionalidad: queda $y = mx$, cuya gráfica es una recta que pasa por el origen. El coeficiente *m* indica la razón de proporcionalidad.

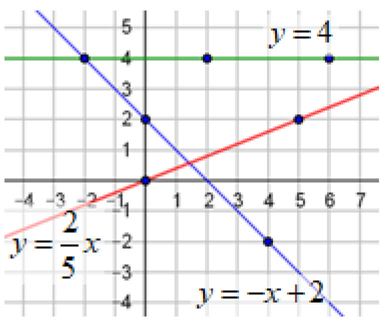
Ejemplos:

En la gráfica adjunta se representan las funciones:

a) $y = 4 \rightarrow$ función constante. Dos de sus puntos son (2, 4) y (6, 4).

b) $y = -x + 2 \rightarrow$ Dos de sus puntos son (0, 2) y (4, –2).

c) $y = \frac{2}{5}x \rightarrow$ función de proporcionalidad. Dos de sus puntos son (0, 0) y (5, 2).



Observa que para representar una recta basta con conocer dos de sus puntos.

→ Las funciones lineales aparecen en múltiples situaciones reales.

Ejemplo:

a) La factura de una compañía suministradora (de agua, luz, gas, …) suele constar de dos cantidades: una <u>cantidad fija</u> (por alquiler de equipos de medida y otros servicios, potencia contratada, …); otra <u>cantidad variable</u> (que depende del consumo). Así, si una compañía eléctrica cobra una cantidad fija de 4,5 €/mes y 0,12 € por kWh consumido, entonces, si la variable que mide el consumo es *x*, la factura viene dada por la expresión $f(x)=0{,}12x+4{,}5$, que es una función lineal. En el supuesto de que se consuman 350 kWh, el coste de la factura será,

$f(350)=0{,}12\cdot 350+4{,}5=46{,}5$ €.

<u>Funciones cuadráticas (de segundo grado)</u>

Su expresión analítica es: $f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

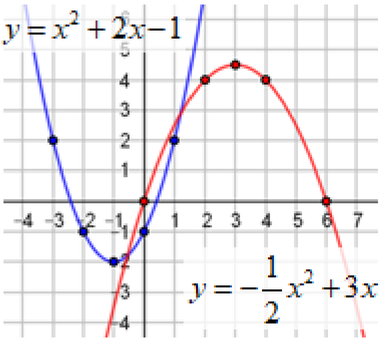
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

- Las funciones de segundo grado más sencillas son $y=ax^2$. Todas son parábolas con vértice en el origen y eje de simetría la recta $x=0$, el eje de ordenadas.
- Para representarlas gráficamente basta con dar valores a *x*, obtener el valor de *y* correspondiente, representar algunos pares (*x*, *y*) y unir los puntos con una línea continua. Entre esos puntos, interesa el vértice (el punto más alto o el más bajo de la parábola) y los puntos de corte con los ejes.

Ejemplos:

En la figura de la derecha se representan las funciones:

$y=x^2+2x-1$ e $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$.



x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	6
$y=x^2+2x-1$	2	–1	–2	–1	2				
$y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$				0		4	$\dfrac{9}{2}$	4	0

Los vértices están en los puntos (–1, –2) y (3, 9/2), respectivamente. En general, la abscisa del vértice es $x_V=-b/2a$. Para $y=x^2+2x-1$, $x_V=-2/2\cdot 1=-1$).

→ Los puntos de corte con el eje *OX* se obtienen resolviendo las ecuaciones:

$0=x^2+2x-1$ y $0=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$, con soluciones $-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$ y 0, 6, respectivamente.

Por tanto, los puntos de corte con el eje *OX* son: $\left(-1-\sqrt{2},\ 0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2}\right)$ y (0, 0), (6,0).

Si la ecuación tuviese solución doble, la parábola cortaría solo una vez al eje *OX*. (Por ej. $y=x^2$).

Si la ecuación no tuviese solución, la parábola no cortaría al eje *OX*. (Por ej. $y=-x^2-2$).

→ El punto de corte con el eje *OY* se obtiene dando a *x* el valor 0. La función $y=x^2+2x-1$ corta al eje *OY* en el punto (0, –1); la función $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$, en el punto (0, 0).

<u>El coeficiente *a*</u> determina la curvatura de la parábola (convexa o cóncava) y su anchura.

Si *a* > 0 la parábola es convexa (∪). Su vértice está en el mínimo de la función.

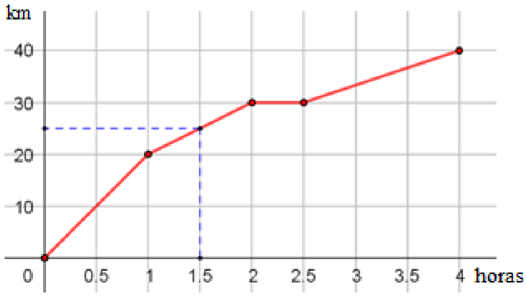
Si *a* < 0, es cóncava (∩). El vértice es el máximo.

En todos los casos, si *a* aumenta la parábola se cierra; y si *a* disminuye, se abre. (Ver Ejercicio 15).

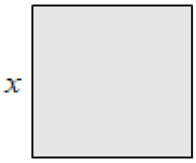
Ejercicios y Problemas

1. Indica si las siguientes relaciones definen una función o no. Justifica la respuesta.
a) A cada persona le corresponde el lugar donde nació.
b) A cada persona le corresponde el idioma que habla.
c) A cada cuadrado le corresponde su área. ¿Qué área corresponde a un cuadrado de lado 7 cm?
d) A cada fracción le corresponde otra equivalente.
e) A cada fracción le corresponde su fracción equivalente irreducible. ¿Qué fracción le corresponde a $\frac{6}{21}$?; ¿y a $\frac{4}{5}$?

2. En la gráfica adjunta se muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida durante una marcha ciclista. Contesta, justificando la respuesta:
a) ¿Es una función? Si lo es, indica su dominio y recorrido.
b) ¿Cuánto tiempo dura la marcha?
c) ¿Cuantos km recorren en total? ¿Cuántos km han recorrido al cabo de 1,5 h?
d) Si están parados en algún momento, indica cuándo y durante cuánto tiempo.



3. Para un cuadrado de lado *x* da la fórmula de la función que determina:
a) Su perímetro.
b) Su área.
Representa ambas funciones en el plano cartesiano.



4. Halla una tabla de valores para las siguientes relaciones entre números:
a) A cada número natural le corresponde el número primo inmediatamente mayor que él.
b) A cada número le corresponde el doble más 3.
c) A cada número le corresponde su tercera parte menos 1.
En cada caso, halla la fórmula correspondiente a cada función y haz su gráfica.
¿Por qué en el caso a) no puede obtenerse una fórmula ni sentido unir los puntos con una línea?

5. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, justifica que existe un número, *x*, tal que su tercera parte menos 1 es igual a su doble más 3. ¿Qué número es?

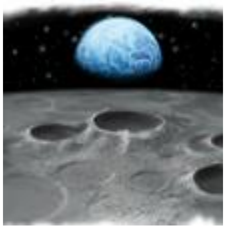
6. Representa gráficamente las funciones lineales:
a) $y=-2x$; b) $y=-2x+3$; c) $y=0,6x$; d) $y=x-4$.

7. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior:
a) Halla el punto de corte de las rectas $y=0,6x$ e $y=x-4$. Comprueba, resolviendo el sistema asociado, que la solución gráfica es correcta.
b) ¿Por qué las rectas $y=-2x$ e $y=-2x+3$ no se cortan? ¿Qué tienen en común? ¿Qué sucede al intentar resolver el sistema que determinan sus ecuaciones?

8. Escribe la expresión de cada una de las siguientes funciones de proporcionalidad:
a) La distancia recorrida por un ciclista, que va a una velocidad constante de 200 m/min, dependiendo tiempo transcurrido.
b) La cantidad a pagar en función de los kilos comprados de patatas, que están a 1,30 €/kg.

9. Cierta compañía de suministro de aguas domésticas cobra 1,60 € por metro cúbico consumido; además, la factura incluye un coste fijo de 12 € mensuales, por gastos de conservación de la red de abastecimiento.
a) Escribe la función que da el importe mensual de la factura de agua en función de los metros cúbicos, x, consumidos.
b) Si se estima que una persona consume 150 litros de agua al día, ¿cuál será el importe mensual (30 días) de la factura de una familia formada por 5 miembros?

10. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 40 € y un coste adicional de 0,10 € por km recorrido.
(II) 0,30 € por km recorrido.
a) Escribe la función que da el pecio de cada modalidad en función de los kilómetros recorridos.
b) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 150 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 300 km?
c) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.

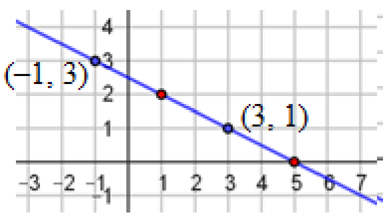


11. Como sabes, si una persona está en la Luna pesa menos que en la Tierra. Ambos pesos están en proporción directa a la fuerza de la gravedad de la Luna (1,62) y de la Tierra (9,81): la razón de gravedades es $\frac{1{,}62}{9{,}81}=0{,}165$; siendo la función correspondiente $y=0{,}165x$, donde x indica el peso en la Tierra e y su correspondiente en la Luna.
a) ¿Cuánto pesará en la Luna una persona que en la Tierra pesa 48 kg, 55 kg, 80 kg?
b) ¿Cuánto pesará en la Tierra una roca que en la Luna pesa 6,6 kg, 8,25, 10 kg?

12. Para medir la temperatura, dos de las escalas más frecuentes son la Celsius o centígrada (ºC) y la Fahrenheit (ºF). Ambas escalas están relacionadas linealmente de acuerdo con la función $y=1{,}8x+32$, donde x se mide en grados centígrados e y en Fahrenheit.
a) ¿Cuántos grados ºF le corresponden a 0 ºC? ¿Y a 100 ºC?
b) ¿Cuántos grados ºC le corresponden a 68 ºF? ¿Y a 99,5 ºF?
c) Representa gráficamente dicha función.

13. Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos (–1,3) y (3, 1). Halla su ecuación y encuentra dos puntos más.

→ Hay que tener en cuenta dos cosas:



1. Si un punto (x_0, y_0) pertenece a una función $y=f(x)$, entonces se cumple que $y_0=f(x_0)$.
2. La expresión de una recta es $y=mx+n$, donde m y n son números.
Por tanto:
Como (–1, 3) es de la recta (x_0 = –1; y_0 = 3) ⇒ $3=m\cdot(-1)+n \Rightarrow 3=-m+n$.
Como (3, 1) es de la recta (x_0 = 3; y_0 = 1) ⇒ $1=3m+n$.
Resolviendo el sistema $\begin{cases}3=-m+n\\1=3m+n\end{cases}$, que es muy fácil por reducción, se obtiene $m=-\frac{1}{2}; n=\frac{5}{2}$.
La ecuación de la recta pedida es $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.
Otros dos puntos son: para x = 1, y = 2, punto (1, 2); para x = 5, y = 0, punto (5, 0).

14. Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos (–2, –3) y (2, 1). Halla su ecuación encuentra dos puntos más.

15. Representa gráficamente las siguientes parábolas (funciones cuadráticas). Comprueba que cuando el coeficiente *a* aumenta la parábola se cierra.

a) $y=\frac{1}{4}x^2$; b) $y=\frac{1}{2}x^2$; c) $y=x^2$; d) $y=2x^2$.

16. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas. Comprueba que cuando el coeficiente *a* > 0, la parábola es convexa (∪9 y cuando a < 0 es cóncava (∩).

a) $y=-2x^2+6x$; b) $y=x^2+2$; c) $y=-x^2+4$; d) $y=-x^2-2x-1$.

Halla, resolviendo la ecuación de segundo grado asociada a cada función, los puntos de corte de las parábolas anteriores con el eje *OX*. (Comprueba que, en cada caso, coinciden con la solución gráfica).

17. Sabiendo que la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y=ax^2+bx+c$ es $x_V=-b/2a$, halla el vértice de cada una de las parábolas del ejercicio anterior.

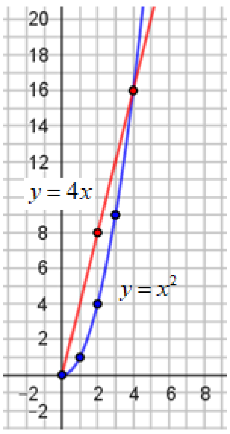
Soluciones:

1. a) Sí: el lugar de nacimiento es único. b) No: una persona puede hablar varios idiomas. c) Sí: el área depende del lado y es única. 49 cm^2. d) No: una fracción tiene muchas equivalentes. e) Sí: la fracción equivalente irreducible es única. 3/7; 4/5.

2. a) Sí: la distancia recorrida depende del tiempo transcurrido y es única. Dom = [0, 4], en horas; Rec = [0, 40], en km. b) 4 horas. c) 40 km. 25 km. d) Entre las 2 y las 2,5 h han estado parados: la línea es plana. Después han continuado la marcha.

3. a) $p(x)=4x$;

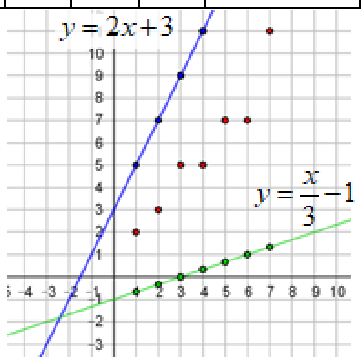
b) $A(x)=x^2$.



4.

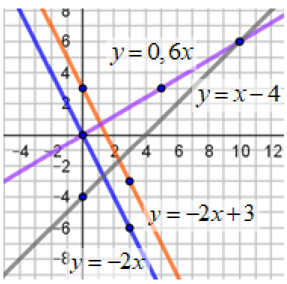
Número	1	2	3	4	5	6	7	...	x
Siguiente primo	2	3	5	5	7	7	11	…	¿?
Doble + 3	5	7	9	11	13	15	17	…	$y=2x+3$
Tercera parte –1	–2/3	–1/3	0	1/3	2/3	1	4/3	…	$y=\frac{x}{3}-1$

a) No pueden unirse: solo tienen siguientes los números enteros (en este caso, los naturales). No hay ninguna propiedad que permita saber el siguiente número primo.



5. Ese número es la abscisa del punto de corte de las rectas $y=2x+3$ e $y=\frac{x}{3}-1 \rightarrow x=-2{,}4$,

6.



7. a) Es la solución del sistema $\begin{cases} y=0{,}6x \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow$ *x* = 10, *y* = 6.

b) Son paralelas. Tienen el mismo coeficiente, *m* = –2; ese coeficiente determina la inclinación (la pendiente) de las rectas: por tener la misma pendiente, son paralelas. El sistema es incompatible.

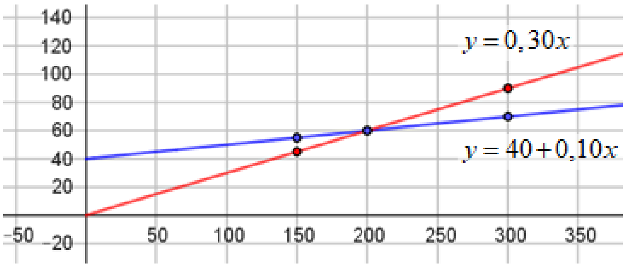
8. a) $y = 200 \cdot x$. b) $y = 1{,}30 \cdot x$.

9. a) $y = 1{,}60x + 12$. b) 48 € → (0,15 m^3)·(5 personas)·(30 días)·1,60 + 12

10. a) (I) $y = 40 + 0{,}10x$; (II) $y = 0{,}30x$.

b) (I) 150 km, 55 €; 300 km, 70 €. (II) 150 km, 45 €; 300 km, 90 €. Para 150 km interesa (II); para 300 km, interesa (I).

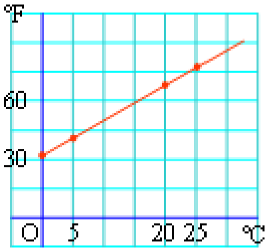
c) 200 km.



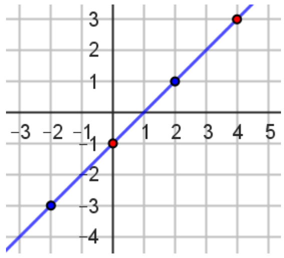
11. a) 7,92, 9,075 y 13,2 kg, respectivamente.

b) 40, 50, 60,606 kg, respectivamente.

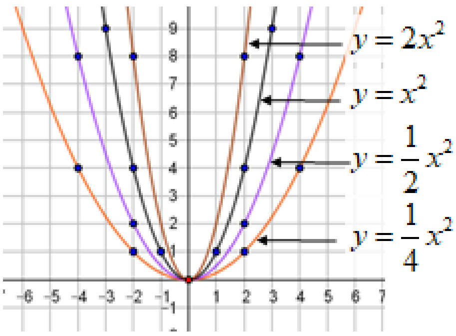
12. a) 32 ºF; 212 ºF. b) 20 ºC; 37,5 ºC.



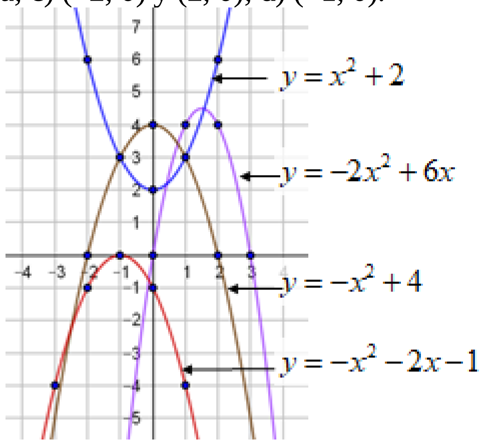
14. $y = x - 1$. Por ejemplo, (0, −1) y (4, 3).



15.



16. Cortes eje *OX*: a) (0, 0) y (3, 0); b) No corta; c) (−2, 0) y (2, 0); d) (−1, 0).



17. Vértices: a) (3/2, 9/2); b) (0, 2); c) (0, 4); d) (−1, 0).