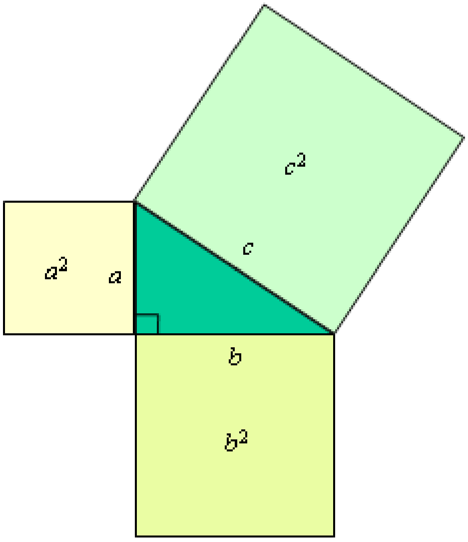
Tema 9. Teorema de Pitágoras Resumen

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:
"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".
O lo que es lo mismo:
Si los catetos miden *a* y *b*, y la hipotenusa *c*, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

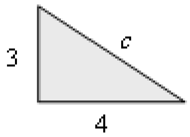
$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; a^2 = c^2 - b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = c^2 - a^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- Recíprocamente, si los lados, *a*, *b* y *c*, de un triángulo verifican la relación $c^2 = a^2 + b^2$, siendo *c* el de mayor longitud, el triángulo es rectángulo; si la relación no se cumple, el triángulo no es rectángulo.

Ejemplos:

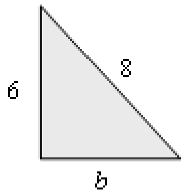
a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, *c*, cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5.$$



b) Si la hipotenusa vale *c* = 8 cm y un cateto vale *a* = 6 cm, el otro cateto, *b*, cumple:

$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5{,}29.$$



c) El triángulo de lados 12, 9 y 8 no es rectángulo, pues $12^2 \neq 9^2 + 8^2$, ya que $12^2 = 144 \neq 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$.

d) El triángulo de lados 17, 15 y 8 sí es rectángulo, pues $17^2 = 15^2 + 8^2$, ya que $17^2 = 289 = 225 + 64 = 15^2 + 8^2$.

Ejercicio

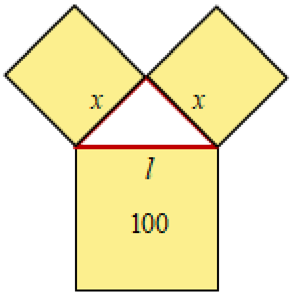
Sobre los lados de un triángulo rectángulo e isósceles se construyen tres cuadrados, como muestra la figura. Si el área del cuadrado mayor mide 100 cm^2, ¿cuánto miden los lados del triángulo?

→ Si el área el cuadrado es 100 cm^2 ⇒ su lado, que es la hipotenusa del triángulo, valdra 10 cm: $l^2 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100} = 10$.

El área de cada cuadrado menor valdrá 50 cm^2, pues

$$l^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow l^2 = 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50.$$

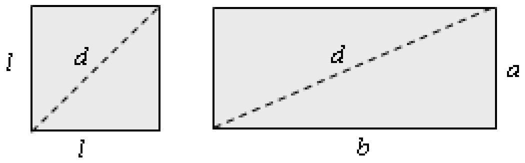
Por lo tanto, $x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$.



Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras

En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos…), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas… Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

- En los cuadrados y en los rectángulos puede hallarse la diagonal cuando se conocen los lados.

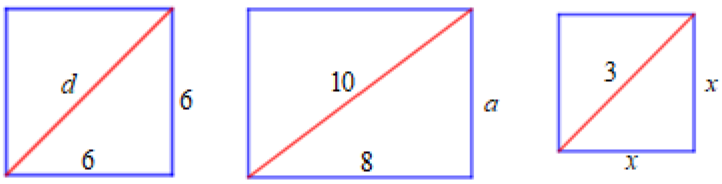


En el cuadrado: $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=\sqrt{2}\cdot l$.
También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.

En el rectángulo: $d=\sqrt{a^2+b^2}$.
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}\approx 8,49$.



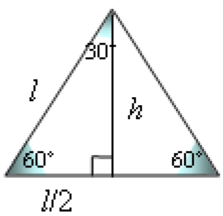
b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale:

$$a^2=10^2-8^2=100-64=36$$
$$\Rightarrow a=6 \text{ cm.}$$

c) Si la diagonal de un cuadrado mide 3 cm, su lado, *x*, se calcula como sigue:

$$d^2=x^2+x^2\Rightarrow 3^2=x^2+x^2\Rightarrow 9=2x^2 \Rightarrow x=\sqrt{4,5}\approx 2,12.$$

- En un triángulo equilátero, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



Esto es: $l^2=h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2=l^2-\frac{l^2}{4}=\frac{3l^2}{4} \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}\cdot l}{2}$.

Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

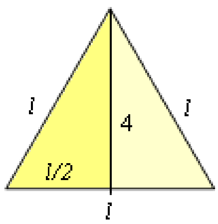
Ejemplos:

a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá: $h=\frac{\sqrt{3}\cdot 15}{2}\approx 13$ cm.

b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:

$$l^2=4^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2=16+\frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2=64+l^2 \Rightarrow 3l^2=64 \Rightarrow$$

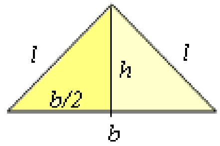
$$l^2=\frac{64}{3} \Rightarrow l=\sqrt{\frac{64}{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 4,61 \text{ cm.}$$



- En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

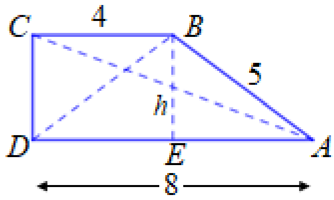
Ejemplo:
Si en el triángulo adjunto el lado l = 5 cm y la base b = 8 cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$



- En <u>trapecios</u> rectángulos o isósceles puede encontrarse el valor de algunos elementos a partir de otros conocidos.

Ejemplos:
a) En el trapecio rectángulo de la figura adjunta, a partir de los datos que se dan, se puede determinar:



→ Su altura:

$$h^2 = 5^2 - |EA|^2 \Rightarrow h^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

(Observa que $|EA| = 8 - |DE| = 8 - |CB| = 8 - 4 = 4$).

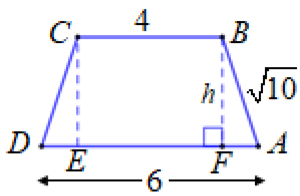
→ Su área: $S = \dfrac{(8+4)\cdot 3}{2} = 18$.

→ Sus diagonales:

$$|CA|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 \Rightarrow |CA|^2 = 3^2 + 8^2 = 73 \Rightarrow |CA| = \sqrt{73} \approx 8,54.$$

$$|DB|^2 = |DE|^2 + |BE|^2 \Rightarrow |DB|^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow |DB| = 5.$$

b) En el trapecio isósceles de la figura adjunta, a partir de los datos que se dan, se puede determinar:



→ Su altura: $h^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 - |FA|^2 \Rightarrow h^2 = 10 - 1^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$.

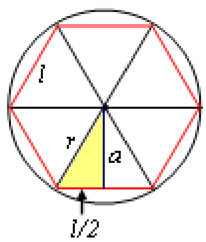
(Observa que $|EF| = 4 \Rightarrow |FA| = 1$, pues $|DE| = |FA|$).

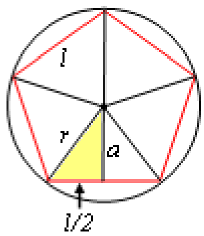
→ Su área: $S = \dfrac{(6+4)\cdot 3}{2} = 15$.

- En los <u>polígonos regulares</u> pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.

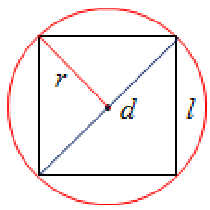
Como puede observarse, al formarse un triángulo rectángulo de hipotenusa r y catetos a y l/2, se tiene que: $r^2 = a^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$.

Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.





Ejemplo:
Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, entonces puede saberse:



→ Su diagonal valdrá: $d^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow d = \sqrt{72} \approx 8,49$

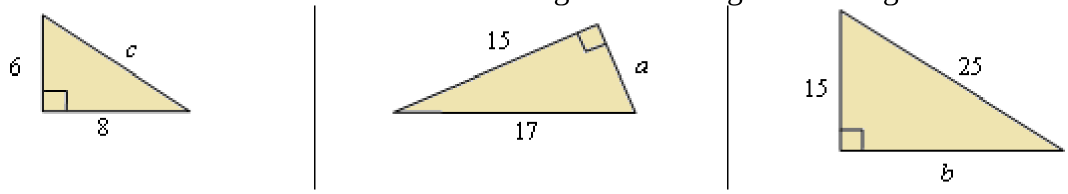
→ El área del círculo valdrá: $S = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{\sqrt{72}}{2}\right)^2 = \pi\cdot\dfrac{72}{4} = 18\pi$.

Como $d = 2r \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{72}}{2}$.

Ejercicios y Problemas

(Para resolver los ejercicios de hoja puede utilizarse calculadora. Haz los dibujos que necesites).

1. Halla el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

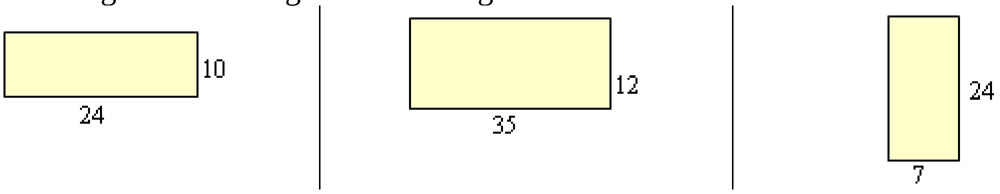


2. Comprueba si son rectángulos (o no son), los triángulos de lados:

a) 9, 11 y 14 cm → NO, pues $9^2 + 11^2 = 81 + 121 = 202$ y $14^2 = 196 \rightarrow 9^2 + 11^2 \neq 14^2$.

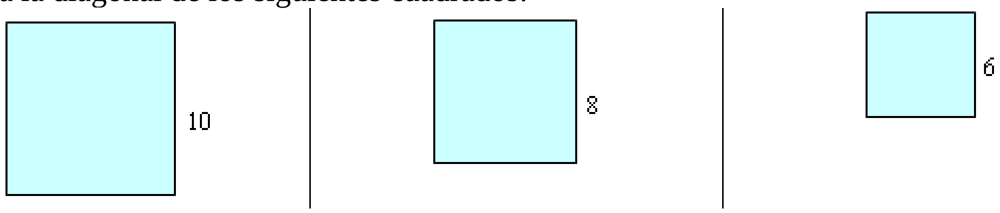
b) 12, 35 y 37 cm; c) 1,7, 0,8 y 1,5 m; d) 5, 8 y $\sqrt{39}$.

3. Halla la diagonal de los siguientes rectángulos:



4. De un rectángulo se sabe que su diagonal mide 29 cm y su base 21 cm. Halla su altura, su perímetro y su área.

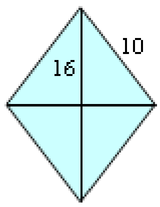
5. Halla la diagonal de los siguientes cuadrados:



6. La diagonal de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuánto mide su lado?

7. Halla el área de un cuadrado de diagonal 15 cm.

8. El lado de un rombo mide 10 cm y su diagonal mayor 16 cm. ¿Cuánto vale su diagonal menor?

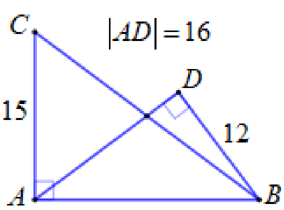


9. Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Halla su lado.

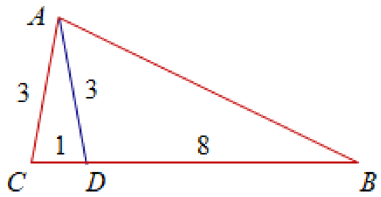
10. Halla el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

11. Un triángulo isósceles tiene perímetro 36 cm. Si su lado desigual mide 10 cm, halla su altura y su área.

12. Con los datos que se dan en la figura, siendo los triángulos *ABC* y *ABD* rectángulos en *A* y en *D*, respectivamente, ¿cuánto mide el *CB*?

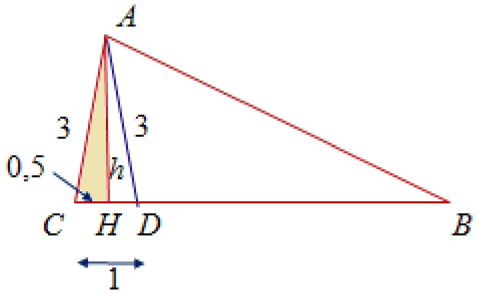


13. ¿Cuál es la longitud del lado *AB* del triángulo *ABC*, sabiendo que *AC* = 3, *AD* = 3, *BD* = 8 y *CD* = 1?



→ El triángulo *ACD* es isósceloes, pues *AC* = 3 y *AD* = 3. Como la base *CD* = 1, trazando la altura correspondiente a ese triángulo (que coincide con la del triángulo *ABC*) y aplicando Pitágoras, se tiene que:

$$3^2 = h^2 + 0,5^2 \Rightarrow h^2 = 9 - \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{35}{4}$$



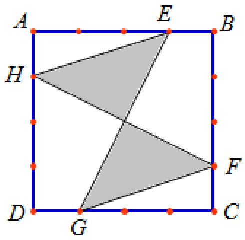
Como *BD* = 8, se tendrá que $BH = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$.

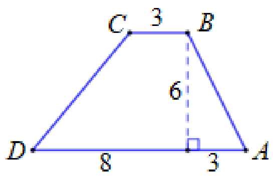
Como el triángulo *AHB* también es rectángulo, se cumple que: $|AB|^2 = |AH|^2 + |HB|^2$.

Luego:

$$|AB|^2 = \frac{35}{4} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{324}{4} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{324}{4}} = \sqrt{81} = 9.$$

14. Cada lado un cuadrado se divide en 4 partes iguales. Utilizando algunos de los puntos de división se construyen los triángulos de la figura. Si el lado del cuadrado mide 8 cm, ¿cuál es el área de cada triángulo?



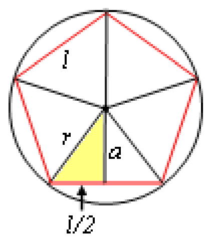


15. A partir de los datos que se dan en el trapecio de la figura adjunta, halla la medida de los lados *AB* y *CD*, y de las diagonales del trapecio.

16. Un pentágono y un hexágono, ambos regulares, se inscriben una circunferencia de radio 10 cm.

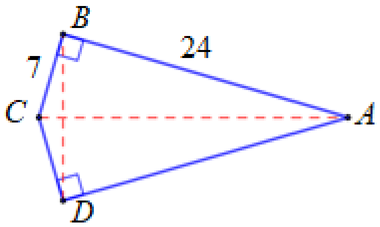
a) Si la apotema del pentágono vale aproximadamente 8,1 cm, halla el lado del pentágono y su área.

b) Calcula la apotema del hexágono y su área.



17. La figura adjunta está formada por la unión de dos triángulos rectángulos iguales, formando un cuadrilátero. Si los catetos miden 7 cm y 24 cm, ¿cuánto miden las diagonales del cuadrilátero?

(Pista. Puede ser útil calcular el área de un triángulo de dos formas distintas).



Soluciones:

1. *c* = 10; *a* = 8; *b* = 20. **2**. a) No. b) Sí. c) Sí. d) Sí. **3**. 26; 37; 25.

4. 20 cm; 82 cm; 420 cm^2. **5**. Aprox: 14,14; 11,31; 8,49. **6**. 8,49.

7. 112,5 cm^2. **8**. 12 cm. **9**. 5 cm. **10**. 27,71 cm^2.

11. 12 cm; 60 cm^2. **12**. $|AB| = 20$; $|CB| = 25$. **14**. 10 cm^2.

15. $|AB| = \sqrt{45} \approx 6,71$; $|CD| = \sqrt{61} \approx 7,81$; $|DB| = 10$; $|AC| = \sqrt{72} \approx 8,49$.

16. a) 11,73 cm; 237,5 cm^2. b) 8,66; 259,8 cm^2. **17**. $|AC| = 25$; $|BD| = 13,44$.