

Tema 6 (II). Polinomios

Resumen

Un polinomio es la suma de varios monomios. Si la suma es de dos monomios se le puede llamar binomio; si es suma de tres monomios, trinomio. Y en general, polinomio.

- Cada uno de los monomios que forman el polinomio se llama término. Como sabes, cada término está formado por una parte numérica (coeficiente) y por una parte literal.
- El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplos:

a) Son binomios: $3a - 5b$, $3x - 7$; $x^2 + 2x$; $2x^3 - \frac{3}{5}x$. El último es de grado 3.

b) Son trinomios: $-2ax + 3a - 5x$; $3x^2 + 2x - 4$; $x^2 - \frac{1}{3}x + 2$. Los tres son de grado 2.

Polinomios en x

En álgebra, para designar una variable, la mayoría de las veces se utiliza la letra x . Por eso, casi siempre se definen polinomios como $4x^3 + 5x - 6$ o $-2x^2 + 7x + 3$; y con frecuencia se escriben así: $A(x) = 4x^3 + 5x - 6$ o $B(x) = -2x^2 + 7x + 3$. La expresión más común es $P(x)$.

Ejemplo:

La expresión $P(x) = 2x^5 - 4x^3 + 5x - 6$ es un polinomio de grado 5. Los términos que lo forman son: $2x^5$, de grado 5 y coeficiente 2; $-4x^3$, de grado 3 y coeficiente -4 ; $5x$, de grado 1 y coeficiente 5; el número -6 es el término independiente.

Ese polinomio no tiene los términos de 4º grado ni de 2º; pero, si conviene, podría escribirse así: $P(x) = 2x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 6 \rightarrow$ los coeficientes, ordenados de mayor a menor grado, son: 2 (para x^5), 0 (para x^4), -4 (para x^3), 0 (para x^2), 5 (para x); -6 (término independiente).

Valor numérico de un polinomio es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

Ejemplo:

El valor numérico de $P(x) = 5x^2 + 2x - 4$ para $x = 3$ es

$$5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 4 = 45 + 6 - 4 = 47 \rightarrow P(3) = 47.$$

Y para $x = -2$ es: $5 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = 5 \cdot 4 - 4 - 4 = 20 - 8 = 12 \rightarrow P(-2) = 12.$

Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes, los de mismo grado.

Ejemplos:

Para los polinomios: $4x^3 + 5x - 6$ y $3x^3 - 2x^2 + 7x$:

$$a) (4x^3 + 5x - 6) + (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 + 3x^3) - 2x^2 + (5x + 7x) - 6 = 7x^3 - 2x^2 + 12x - 6.$$

$$b) (4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 - 3x^3) - (-2x^2) + (5x - 7x) - 6 = x^3 + 2x^2 - 2x - 6.$$

Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de un polinomio por un monomio

Se multiplica cada término del polinomio por el monomio; para ello se utiliza la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación.

Ejemplos:

$$a) 4(2x^2 - 3x + 5) = 4(2x^2) + 4(-3x) + 4 \cdot 5 = 8x^2 - 12x + 20.$$

$$b) 4x^2 \cdot (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^2 \cdot 3x^3) + (4x^2 \cdot (-2x^2)) + (4x^2 \cdot 7x) = 12x^5 - 8x^4 + 28x^3.$$

$$c) -3x(5x^2 - 4x - 7) = -(3x \cdot 5x^2) - (3x(-4x)) - (3x(-7)) = -15x^3 + 12x^2 + 21x.$$

Observación: es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de dos polinomios

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: “todos por todos”. Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

Ejemplos:

$$a) (5x - 6)(2x^2 - 3x + 1) = (5x)(2x^2 - 3x + 1) - 6(2x^2 - 3x + 1) = \\ = (5x \cdot 2x^2) + (5x \cdot (-3x)) + (5x \cdot 1) - (6 \cdot 2x^2) - (6 \cdot (-3x)) - (6 \cdot 1) = \\ = 10x^3 - 15x^2 + 5x - 12x^2 + 18x - 6 = 10x^3 - 27x^2 + 23x - 6.$$

$$b) (4x^3 + 5x - 6)(3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 \cdot 3x^3) + (4x^3 \cdot (-2x^2)) + (4x^3 \cdot 7x) + \\ + (5x \cdot 3x^3) + (5x \cdot (-2x^2)) + (5x \cdot 7x) - (6 \cdot 3x^3) - (6 \cdot (-2x^2)) - (6 \cdot 7x) = \\ = 12x^6 - 8x^5 + 28x^4 + 15x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 18x^3 + 12x^2 - 42x = \\ = 12x^6 - 8x^5 + 43x^4 - 28x^3 + 47x^2 - 42x.$$

Observaciones: 1) Cuando una expresión algebraica no cabe en una línea debe “romperse” por un signo + o -, nunca por un producto.

2) Es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al sumar; y las propiedades de las operaciones con potencias.

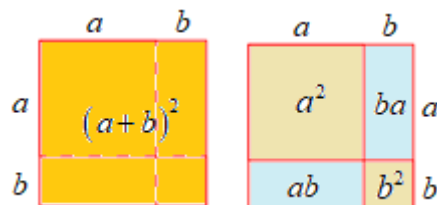
Productos notables

Cuadrado de una suma: $(a+b)^2$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \rightarrow$$

$$(a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow \underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$



Observa que un cuadrado de lado $a + b$ se puede descomponer en dos cuadrados, uno de lado a y otro de lado b , más dos rectángulos de lados a y b . (Sus áreas son las que se indican).

Ejemplos:

$$a) (3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25.$$

$$b) (x^2 + 1)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1.$$

Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) - b \cdot a - b \cdot (-b) = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow \underline{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Ejemplos:

a) $(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9.$

b) $(5-x^2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x^2 + (x^2)^2 = 25 - 10x^2 + x^4.$

Suma por diferencia: $(a+b)(a-b)$

Multiplicando como dos polinomios:

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - b^2 \rightarrow \underline{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Ejemplos:

a) $(4x+3)(4x-3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9.$

b) $(2+x^2)(2-x^2) = 2^2 - (x^2)^2 = 4 - x^4.$

División de un polinomio entre un número o un monomio

Se divide cada término del polinomio por el número o por el monomio.

(El resultado no siempre es otro polinomio. Hay que tener en cuenta la regla de los signos)

Ejemplos:

a) $(4x^2 - 6x + 8) : 2 = \frac{4x^2 - 6x + 8}{2} = \frac{4x^2}{2} - \frac{6x}{2} + \frac{8}{2} = 2x^2 - 3x + 4.$

b) $(4x^3 + 5x^2 - 2x + 4) : (2x) = \frac{4x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{2x} = \frac{4x^3}{2x} + \frac{5x^2}{2x} - \frac{2x}{2x} + \frac{4}{2x} = 2x^2 + \frac{5}{2}x - 1 + \frac{2}{x}.$

Ejercicios y Problemas

1. Indica el grado y los coeficientes de cada término, ordenados de mayor a menor, de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 3x + 5$

b) $-x + 3$

c) $2x^3 - 3x$

d) $3x^4 + 2x^2 - 4x + 1$

2. Halla el valor numérico de cada uno de los polinomios anteriores para $x = 1$, $x = -2$ y $x = 0$.

a) $x^2 - 3x + 5$

b) $-x + 3$

c) $2x^3 - 3x$

d) $3x^4 + 2x^2 - 4x + 1$

3. Halla las siguientes sumas y restas de polinomios:

a) $(5x+6) + (3x+9)$

b) $(5x+6) - (3x+9)$

c) $(3x^2 + 2x + 7) + (4x - 5)$

d) $(3x^2 + 2x + 7) - (4x - 5)$

e) $(4x^2 + 5x - 6) - (2x^2 - 3x)$

f) $3(5x - 8) - 4(6x - 7)$

4. Dados los polinomios: $A(x) = 2x^2 - 5x + 6$; $B(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x - 1$; $C(x) = x^2 + 3x - 2$, halla:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x) + C(x)$

c) $A(x) + 2B(x) - C(x)$

5. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $2(4x^3 + 5x - 6)$

b) $4(3x^2 + 5x - 6) - 3(3x^2 - 2)$

c) $2(x^2 - 5x + 7) - 3(4x + 6)$

6. Calcula:

a) $5x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 3)$ b) $(5x^2)(-x^3)(4x - 3)$ c) $3(2x^2)(x + 4)(x - 3)$

7. Halla:

a) $(x + 3)(x + 5)$ b) $(x + 4)(x - 5)$ c) $(x - 3)(x - 2)$
 d) $(5x + 6)(4x - 5)$ e) $(2x^2 - 3)(3x - 7)$ f) $(-5x + 3)(4x^2 + 7x)$

8. Dados los polinomios: $P(x) = 2x^2 + 3x - 4$; $Q(x) = 7x - 2$; $R(x) = x^2 - 5x + 3$, halla:

a) $P(x) \cdot Q(x)$ b) $P(x) \cdot R(x)$ c) $Q(x) \cdot R(x) =$

9. Halla, multiplicando término a término; después, comprueba aplicando la fórmula correspondiente, que el resultado es el mismo.

a) $(2x + 5)^2 = (2x + 5)(2x + 5) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 5 + 5 \cdot 2x + 5 \cdot 5 = 4x^2 + 10x + 10x + 25 = 4x^2 + 20x + 25.$

$\rightarrow (2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 = 2^2 \cdot x^2 + 20x + 25 = 4x^2 + 20x + 25.$

b) $(x^2 + 3)^2$ c) $(2x - 3)^2$ d) $(x^2 - 2)^2$ e) $(x + 5)(x - 5)$ f) $(x - 3)(x + 3)$

10. Simplifica las siguientes divisiones:

a) $\frac{12x^2 - 6x + 4}{2}$ b) $\frac{12x^3 + 4x^2}{2x}$ c) $\frac{8x^2 - 6x}{4x}$ d) $\frac{2x^3 - 6x^2 + 3x + 2}{x}$

Soluciones.

1. a) 2; 1, -3, 5. b) 1; -1, 3. c) 3; 2, 0, -3, 0. d) 4; 3, 0, 2, -4, 1.

2. a) $x = 1 \rightarrow 3$; $x = -2 \rightarrow 15$; $x = 0 \rightarrow 5$. b) 2; 5; 3. c) -1; -10; 0. d) 2; 65; 1.

3. a) $8x + 15$. b) $2x - 3$. c) $3x^2 + 6x + 2$. d) $3x^2 - 2x + 12$. e) $2x^2 + 8x - 6$. f) $-9x + 4$.

4. a) $3x^2 + 2x + 5$. b) $-3x^3 + 5x^2 - 9x + 5$. c) $6x^3 - 3x^2 + 6x + 6$.

5. a) $8x^3 + 10x - 12$. b) $3x^2 + 20x - 18$. c) $2x^2 - 22x - 4$.

6. a) $10x^4 - 20x^3 + 15x$. b) $-20x^6 + 15x^5$. c) $6x^4 + 6x^3 - 72x^2$.

7. a) $x^2 + 8x + 15$. b) $x^2 - x - 20$. c) $x^2 - 5x + 6$. d) $20x^2 - x - 30$. e) $6x^3 - 14x^2 - 9x + 21$.

f) $-20x^3 - 23x^2 + 21x$.

8. a) $14x^3 + 17x^2 - 34x + 8$. b) $2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 29x - 12$. c) $7x^3 - 37x^2 + 31x - 6$.

9. a) $4x^2 + 2x + 25$. b) $x^4 + 6x^2 + 9$. c) $4x^2 - 12x + 9$. d) $x^4 - 4x^2 + 4$. e) $x^2 - 25$. f) $x^2 - 9$.

10. a) $6x^2 - 3x + 2$. b) $6x^2 + 2x$. c) $2x - \frac{3}{2}$. d) $2x^2 - 6x + 3 + \frac{2}{x}$.