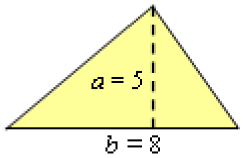
Tema 6 (I). Álgebra **Resumen**

Una expresión algebraica es aquella en la que aparecen números y letras, unidos por las operaciones habituales.
El álgebra utiliza esas expresiones para establecer relaciones de carácter genérico, pues las letras pueden tomar cualquier valor.

- El álgebra permite dar fórmulas generales.

Ejemplos:

a) El área de un triángulo es $A = \frac{b \cdot a}{2}$, siendo *b* la base y *a* la altura.



Si la base mide 8 y altura 5, el área del triángulo es: $A = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

b) En el tema de porcentajes se dio la fórmula $C_F = C \cdot (1 + r)$, que da el precio final de cualquier producto que vale *C* y aumenta un *r* por uno. Así, si ese aumento fuese del 15 % (*r* = 0,15), el valor aumentado será $C_F = C \cdot (1 + 0{,}15) \Rightarrow C_F = 1{,}15C$.
Si $C = 240$ €, $C_F = 1{,}15 \cdot 240 = 276$ €.

- El álgebra permite expresar propiedades generales. Así, para indicar que una operación, por ejemplo, la suma, cumple la propiedad conmutativa, se escribe: $a + b = b + a$.

- El álgebra permite manejar números de valor desconocido.

Ejemplos:
Si con la letra *x* se designa un número desconocido, entonces:
a) El doble de *x* es 2*x*, que significa 2 · *x*. Por tanto, si *x* valiese 8, 2*x* valdría 16.
b) La mitad de *x* es $x : 2 = \frac{x}{2}$ → Si *x* valiese 100, $\frac{x}{2}$ valdría 50.
c) El cuadrado de *x* es x^2, que significa $x \cdot x$ → si *x* valiese 7, $x^2 = 7^2 = 49$.
d) La suma $2x + 5x$ es igual a $7x$. Igualmente: $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}x = \frac{8}{3}x$; y $x - \frac{x}{3} = \frac{x}{1} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{3} - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$.

- El álgebra permite establecer relaciones entre números. Así, para indicar que dos números son consecutivos se les da valores *x* y *x* + 1.

Monomios
Son las expresiones algebraicas más simples. Sólo tienen un término.
Un término es: un número; una letra; o un producto de números por letras.
Ejemplos:
a) Cualquier número es un término. Así, 8, –3 o $\frac{4}{3}$ son términos, que por no poder variar se llaman constantes; son términos independientes.
b) Cualquier letra es un término. Así, *a*, *b* o *x* son términos.
c) Cualquier producto de números por letras es un término. Así, $3 \cdot a$, $-4 \cdot a \cdot x$ o $x \cdot x$ son términos. Esos términos suelen escribirse omitiendo los puntos de multiplicar. Esto es:

$$3 \cdot a = 3a,\ -4 \cdot a \cdot x = -4ax \text{ o } x \cdot x = x^2.$$

d) La expresión $2a^2b - 4b + 5$ no es un monomio, pues está formada por tres términos. Por tanto, si hay sumas o restas la expresión no es un monomio. Se llamará polinomio.

- En un monomio, al número se le llama coeficiente; a la letra o letras que lo multiplican se le llama parte literal.

Ejemplo:
La parte literal de $3a$, $-4ax$ y x^2 es, respectivamente, a, ax y x^2. Sus coeficientes, también respectivamente, son: 3, –4 y 1.
Observa que cuando la parte literal no lleva número, su coeficiente es 1; y si va sola con signo negativo, su coeficiente es –1. No se ponen por comodidad. Así, los coeficientes de $-ab^2$ y de x^3 son, respectivamente, –1 y 1.

- Valor numérico de un monomio es el valor que se obtiene cuando se sustituyen las letras por números.

Ejemplos:
a) Si $a = 3$ y $b = -2$, el valor numérico de $-ab^2$ es $-3\cdot(-2)^2 = -3\cdot 4 = -12$.
b) Si $a = -2$ y $b = 5$, el valor numérico de $-4ab^2$ es $-4(-2)\cdot 5^2 = 8\cdot 25 = 200$.

- El grado de un monomio es el grado de la parte literal, que es la suma de los grados de las letras que la forman.

Ejemplos:
El grado de $3a$ es 1; el grado de x^2 es 2; el grado de $2a^2b$ es 3; el de $-a^2x^3$ es 5.

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.
Ejemplos:
a) Los monomios $3a$ y $5a$ son semejantes.
b) También son semejantes los monomios: x^2 y $6x^2$; y $-2a^2b$ y $3a^2b$.
c) No son semejantes: $3a$ y $2ab$. Tampoco lo son $2x^2$ y $3x$.

Suma y resta de monomios
Solo pueden sumarse o restarse los monomios semejantes.
Cuando dos monomios no son semejantes, no pueden agruparse; la operación se deja indicada.
Ejemplos:
a) Los monomios $3a$ y $5a$ pueden sumarse y restarse. Esto es, pueden hacerse las operaciones: $3a + 5a$ y $3a - 5a$.
b) Los monomios $2x^2$ y $3x$ no pueden sumarse ni restarse. Las operaciones $2x^2 + 3x$ y $2x^2 - 3x$ no pueden realizarse, se dejan así.

- Para sumar (o restar) monomios se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:
a) $3a + 5a = (3+5)a = 8a$; b) $3a - 5a = (3-5)a = -2a$; c) $2x + 7x - 5x = 4x$.
d) $2x^2 + 3x$ se deja indicada, como está. e) $2x + 7x - 5 = 9x - 5$.

- La suma y resta de expresiones algebraicas cumplen las mismas propiedades que la suma y resta de números. Habrá que tener en cuenta las reglas de los signos.

Ejemplos:
a) $2a + 7a = 7a + 2a$; b) $5a - (a - 3a) = 5a - (-2a) = 5a + 2a = 7a$.

Producto de monomios
Pueden multiplicarse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para multiplicar dos monomios se multiplican números por números y letras por letras.
Ejemplos:
a) $(3a)\cdot(5a) = (3\cdot 5)\cdot(a\cdot a) = 15a^2$; b) $(3a)\cdot(-5a) = (3\cdot(-5))\cdot(a\cdot a) = -15a^2$;
c) $x\cdot x\cdot x = x^3$; d) $(2x^2)\cdot(3x) = 2\cdot 3\cdot x^2\cdot x = 6x^3$.

División de monomios
Pueden dividirse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para dividir dos monomios se dividen "números entre números y letras entre letras". La parte de la expresión que no pueda simplificarse se dejará indicada en forma de fracción
Ejemplos:
a) $\frac{12a^2}{3a} = \frac{12}{3}\cdot\frac{a^2}{a} = 4a$; b) $\frac{10a^2b}{15ab^3} = \frac{10}{15}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{b}{b^3} = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{b^2} = \frac{2a}{3b^2}$;
c) $\frac{5x^2}{15x} = \frac{5}{15}\cdot\frac{x^2}{x} = \frac{1}{5}x = \frac{x}{5}$; d) $\frac{-10x^2y}{5xy^2} = \frac{-10}{5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y}{y^2} = -2x\cdot\frac{1}{y} = -\frac{2x}{y}$.

Ejercicios y Problemas

1. Dibuja un rectángulo de base *b* y altura *a*. Indica las expresiones algebraicas que dan el área y el perímetro de ese rectángulo. ¿Cuál será el valor numérico de esas expresiones cuando $a = 2$ y $b = 7$ cm?

2. Indica mediante una expresión algebraica las siguientes relaciones:
a) La suma de dos números es 34. b) Un número es tres unidades mayor que otro.
c) Un número más su consecutivo. d) El triple de un número vale 51.

3. Indica mediante una expresión algebraica las siguientes situaciones:
a) La suma de dos números consecutivos vale 71.
b) Un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo y entre ambos suman 45 años.
c) Un número más su cuadrado suman 20.
d) La base de un rectángulo es doble que su altura. Expresa su área y su perímetro.
e) Un supermercado sube los precios un 4 %. Da la expresión de los nuevos precios si los anteriores eran *x*.
f) Las rebajas son de un 40 %. Da el valor de los precios rebajados si los anteriores eran *x*.

4. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:
a) $5ab$ b) $-x^3$ c) $\frac{4x^2y}{3}$ d) $5x^2$

5. Indica si son semejantes o no los siguientes pares de monomios:
a) $-3a$ y $2a$ b) $4a^3$ y $4a$ c) $-x^2$ y $\frac{4x^2}{3}$ d) $2x^3$ y $3x^2$

6. Suma o resta, en los casos que sea posible:
a) $5a-3a+8a$ b) $5a-(6a-2a)$ c) $2x-3x$ d) $3x^2-x^2$
e) $2x^2+3x^3$ f) $\frac{7}{3}x-\frac{2}{9}x$ g) $x^2-\frac{x^2}{3}$ h) $10x-2x+5$

7. Simplifica, sumando y restando cuando se pueda:

a) $5x+7x-4x$ b) $3a^2-(5a^2-3a^2)$ c) $5x-3x+7$

d) $3x^2+6x-3x$ e) $2x^2-5x-3x^3+4x$ f) $\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}x$

8. Simplifica, agrupando los términos semejantes:

a) $3a+5a-(4a-3)$ b) $3x-5x^2-(2x^2+3x)$ c) $5x-(3x-6)-4$

9. Multiplica, haciendo las operaciones paso a paso:

a) $5\cdot(3a^2)$ b) $(-3)\cdot(-5a)$ c) $4\cdot(2a)\cdot(-a^2)$ d) $3\cdot(5x^2)$

e) $4\cdot(3-4x)$ f) $(-2)\cdot(-ab^2)$ g) $(3a^2)\cdot(7a)$ h) $(2x)\cdot(3x^2)\cdot(x^3)$

10. Simplifica, indicando los pasos intermedios, las siguientes expresiones:

a) $\frac{18a}{3b}$ b) $\frac{12x^2}{4x}$ c) $\frac{8x^2y}{3xy}$ d) $\frac{21x}{3}$

e) $\frac{18x^5}{4x^2}$ f) $\frac{14x^2-6x^2}{2x}$ g) $\frac{4x^2+4x}{4x}$ h) $\frac{8x^2-6x}{2x}$

Soluciones.

1. a) $A=b\cdot a$; $P=2b+2a$. 14 cm^2; 18 cm.

2. a) $a+b=34$. b) $y=x+3$. c) $x+(x+1)$. *d)* $3x=51$.

3. a) $x+(x+1)=71$. b) Hijo → *x*; padre → 4*x*. $x+4x=45$. c) $x+x^2=20$.

d) Si la altura es *h*, la base es 2*h*. Área: $2h^2$; perímetro: $6h$.

e) Precio nuevo: 1,04*x*. f) Precio rebajado: 0,6*x*.

4. a) 5 y ab. b) –1 y x^3. c) $\frac{4}{3}$ y x^2y. d) 5 y x^2. **5**. Son semejantes: a) y c).

6. a) $10a$. b) a. c) –*x*. d) $2x^2$. f) $\frac{19}{9}x$. g) $\frac{2x^2}{3}$. h) $8x+5$.

7. a) $8x$. b) a^2. c) $2x+7$. d) $3x^2+3x$. e) $-x^2-x$. f) $\frac{1}{10}x$. **8.** a) $4a+3$. b) $-3x^2$. c) $2x+2$.

9. a) $15a^2$. b) $15a$. c) $-8a^3$. d) $15x^2$. e) $12-16x$. f) $2ab^2$. g) $21a^3$. h) $6x^6$.

10. a) $\frac{6a}{b}$. b) $3x$. c) $\frac{8x}{3}$. d) $7x$. e) $\frac{9x^3}{2}$. f) $\frac{8x^2}{2x}=4x$.

g) $\frac{4x^2}{4x}+\frac{4x}{4x}=x+1$. h) $\frac{8x^2}{2x}-\frac{6x}{2x}=4x-3$.