Tema 2. Divisibilidad Resumen

Un número <u>*a* es múltiplo por otro *b*</u> si la división de *a* entre *b* es exacta. (Los números *a* y *b* deben ser naturales, aunque el concepto se extiende sin dificultad a los números enteros).
También puede decirse que <u>*b* es divisor de *a*</u>.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número entero tiene infinitos múltiplos, que se obtienen multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 0 es múltiplo de todos los números.
- El número 1 es divisor de todos los números.

<u>Divisores de un número; números primos</u>
Un número puede tener varios divisores → Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
Si un número solo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama <u>primo</u>.

Números primos			
2	3	5	7
11	13	17	19
23	29	31	37
41	43	47	53
59	61	67	71
73	79	83	89
97	…		

Ejemplos:
a) Los números 7, 17 o 23 son primos. (Todos los números primos mayores que 2 son impares).
b) Los números 42 y 51 son compuestos, pues: 42 = 6 · 7; 51 = 3 · 17.

<u>Descomposición factorial de un número</u>
Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.

- <u>Factor</u> de un número es cada uno de sus divisores.
- Un número puede descomponerse como producto de factores de varias maneras.

Ejemplos:
a) 72 = 2 · 36; o también, 72 = 8 · 9 = 2 · 3 · 12.
b) 100 = 2 · 50 = 5 · 20 = …

- Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos.
- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

Ejemplo:
a) El número 72 se escribe como producto de factores primos así: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$. c) $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$.

Para hallar la descomposición factorial de un número hay que dividir, sucesivamente, por sus factores primos, hasta que el último divisor sea 1. Para ello conviene conocer algunos <u>criterios de divisibilidad</u>.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

- <u>Divisibilidad por 2</u>. Un número es divisible por 2 si es par.

Ejemplos:
Los números 2, 30 y 94 son múltiplos de 2 → 2 = 2 · 1; 30 = 2 · 15; 94 = 2 · 47.

- <u>Divisibilidad por 3</u>. Un número es divisible por 3 si la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplos:
a) 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
b) Los números 134 o 2227 no son múltiplos de 3. (Las cifras de 134 suman 8; las cifras de 2227 suman 13. Ni 8 ni 13 son múltiplos de 3).

- Divisibilidad por 5. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Ejemplos:
Los números 35, 90 y 1035 son múltiplos de 5.
$35 = 5 \cdot 7$; $90 = 5 \cdot 18$; $1035 = 5 \cdot 207$.

- Divisibilidad por 11. Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de sus cifras pares y la suma de sus cifras impares es 0, 11 o múltiplo de 11.

Ejemplos:
a) El número 1309 es múltiplo de 11, pues: la suma de sus cifras pares, $3 + 9 = 12$; la suma de sus cifras impares, $1 + 0 = 1$; la diferencia entre ambas sumas es $12 - 1 = 11$.
b) El número 91839 es múltiplo de 11, pues: $1 + 3 = 4$; $9 + 8 + 9 = 26$; la diferencia entre ambas sumas es $4 - 26 = -22$, que es múltiplo de 11. En efecto: $91839 = 11 \cdot 8349$.
c) Puedes comprobar que los números 847, 308, 4114 y 3707 son múltiplos de 11.

Otros criterios de divisibilidad (para números no primos)

- Divisibilidad por 4. Un número es divisible por 4 cuando el número que determinan sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
- Divisibilidad por 6. Un número es divisible por 6 cuando lo es por 2 y por 3.
- Divisibilidad por 8. Un número es divisible por 8 cuando el número que determinan sus tres últimas cifras es múltiplo de 8.
- Divisibilidad por 9. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras en múltiplo de 9.
- Divisibilidad por 25. Un número es divisible por 25 cuando el número que determinan sus dos últimas cifras es múltiplo de 25; cuando termina en 00, 25, 50 o 75.

Ejemplos:
a) 7132 es múltiplo de 4, pues termina en 32, que es múltiplo de 4 $\rightarrow 7132 = 4 \cdot 1783$.
b) 804 es múltiplo de 6, pues lo es de 2 y de 3 $\rightarrow 804 = 6 \cdot 134$. (Como 804 también es múltiplo de 4, pues concluirse será múltiplo de 12 $\rightarrow 804 = 12 \cdot 67$).
c) 1000, 1008, 1016, … 23808 son múltiplos de 8.
d) 909 y 1035 son múltiplos de 9, pues sus cifras suman, respectivamente, 18 y 9, que son números múltiplos de 9.
e) El número 2027 es primo. (Para comprobar que un número es primo hay que dividir, por los sucesivos números primos, hasta que el cociente sea menor que el último primo por el que se ha dividido. Para ver que 2027 es primo hay que dividir por los sucesivos números primos hasta el 47).

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números

- Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de los divisores comunes se llama máximo común divisor: m.c.d.

Ejemplo:
Los números 48 y 36 tienen varios divisores comunes. El mayor de ellos es 12.
Divisores de 48: **1, 2, 3, 4, 6**, 8, **12**, 16, 24 y 48.
Divisores de 36: **1, 2, 3, 4, 6**, 9, **12**, 18 y 36.

- Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de los múltiplos comunes se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

Ejemplo:
Los números 48 y 36 tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos es 144.
Múltiplos de 48: 48, 96, **144**, 192, 240, **288**, …, **432**, …, **576**…
Múltiplos de 36: 36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, **288**, …, **432**, …, **576**…

Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números
Para calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.
- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplos:
a) Los números 48 y 36 se descomponen así: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
m.c.d.(48, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$.   m.c.m.(48, 36) = $2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$.

b) Los números 100 y 135 se descomponen así: $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $135 = 3^3 \cdot 5$.
m.c.d.(100, 135) = 5.   m.c.m.(100, 135) = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 27 \cdot 25 = 2700$.

c) Para halar el mcd y el mcm de los números 24, 33 y 90:
1) se escriben como producto de sus factores primos: $24 = 2^3 \cdot 3$; $33 = 3 \cdot 11$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
2) mcd(24, 33, 90) = 3, pues 3 es el único factor común de los tres números; siendo 1 el menor exponente.
3) mcm(24, 33, 90) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960 \to$ Observa que: $3960 = \underline{24} \cdot 165 = \underline{33} \cdot 120 = \underline{90} \cdot 44$.

Números primos entre sí
Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es 1.

Ejemplos:
a) Los números 10 y 21 son primos entre sí.
Los divisores de 10 son 1, 2, 5, y 10; los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21. El único divisor común es 1.
En este caso:
m.c.d.(10, 21) = 1.   m.c.m.(10, 21) = $10 \cdot 21 = 210 \to 10 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$.

b) Los números 36 y 55 son primos entre sí.
Observa que: $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $55 = 5 \cdot 11$.
m.c.d.(36, 55) = 1.   m.c.m.(36, 55) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 36 \cdot 55 = 1980$.

- Si dos números p y q son primos entre sí $\Rightarrow$ mcm(p, q) = $p \cdot q$.

Ejercicios y Problemas

1. Calcula tres múltiplos y tres divisores, si los tiene, de cada uno de los siguientes números:
a) 50 b) 72 c) 16 d) 17

2. Indica cuáles de los siguientes números son primos:
a) 101 b) 1003 c) 2003 d) 2023

3. Descompón en factores primos los números:
a) 40 b) 105 c) 97 d) 360

4. A partir de su descomposición factorial, indica todos los divisores de:
a) 36 b) 42 c) 121 d) 71

5. Utilizando los criterios, indica para los siguientes números sus divisores primos:
a) 1234 b) 616 c) 1008 d) 420

6. Calcula, razonando la respuesta, qué valores debe tomar X para que el número 45X sea:
a) Múltiplo de 2 b) Múltiplo de 3 c) Múltiplo de 11 d) Múltiplo de 9

7. "Inventa" un criterio de divisibilidad para 18, y otro para 45. Aplicándolos, sin hacer la división, comprueba que:
a) El número 72162 es múltiplo de 18. b) El número 10305 es múltiplo de 45.

8. En la tabla de números primos que se da al principio de este resumen se escriben los números primos hasta el 97; escribe los tres primos siguientes.

9. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:
a) 25 y 35 b) 42 y 63 c) 10, 30 y 80 d) 24, 36 y 72

10. Halla todos los divisores comunes de:
a) 18 y 24 b) 21 y 28 c) 45 y 60 d) 9 y 23

11. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

12. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

13. Indica si las siguientes parejas de números son o no primos entre sí.
a) 21 y 40 b) 14 y 35 c) 33 y 143 d) 34 y 119

14. Para pavimentar una habitación de 4 × 3,60 metros se desean emplear baldosas cuadradas. ¿Cuánto medirán de lado para que el número de baldosas sea mínimo, sin necesidad de cortar ninguna? ¿Cuántas baldosas serán necesarias?

15. En una caja hay un número indeterminado de canicas. Si se cuentan de 7 en 7, de 8 en 8 y de 9 en 9, siempre sobran 5. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede haber en la caja?

16. En una carrera de Fórmula 1 uno de los coches (A) tarda 2 minutos en dar una vuelta al circuito; otro coche (B) tarda 2 min, 15 s en dar la misma vuelta. Si salen de meta a la vez:

a) ¿Cuánto tiempo tarda el coche A en doblar al coche B? (Doblar consiste en alcanzarlo; en adelantarlo viniendo desde atrás).

b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada coche en ese momento?

→ a) Los coches coinciden en los múltiplos comunes de ambos tiempos, que deben expresarse en segundos: 120 s el coche A; 135 s el B.

Como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $135 = 3^3 \cdot 5$ $\Rightarrow$ m.c.m.(120, 135) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ = 1080 s.

b) En ese tiempo el coche A da 9 vueltas (1080 : 120 = 9) y el coche B da 8 vueltas (1080 : 135 = 8).

17. En cierta parada de autobús coinciden, a las 8:00 h, los vehículos, de tres líneas diferentes, A, B y C. La línea A tiene un servicio cada 20 minutos, la línea B, cada 30 minutos, y la línea C, cada 45 minutos. ¿A qué hora volverán a coincidir los autobuses de las tres líneas en la salida?

18. El producto de dos números primos entre sí es 357. Encuentra las tres parejas posibles.

Soluciones:

1. a) 50, 100 y 150; 25, 10 y 5. b) 72, 144 y 720; 36, 18 y 1. c) 32, 48 y 64; 8, 4 y 2. d) 17, 34 y 51; 1 y 17: es primo.
2. 101 y 2003 son primos; 1003 = 17 · 59; 2023 = 7 · 289.
3. a) 40 = 2 · 2 · 2 · 5. b) 105 = 3 · 5 · 7. c) 97 = 1 · 97, primo. d) 360 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5.
4. a) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. b) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. c) 1, 11, 121. d) 1, 71.
5. a) 1234 = 2 · 617 → 2 y 617. b) 616 = 2 · 11 · 28 → 2, 11 y 7.
c) 1008 = 2 · 9 ·56 → 2, 3 y 7. d) 420 = 2 · 3 · 5 · 14 → 2, 3, 5 y 7.
6. a) 0, 2, 4, 6 o 8. b) 0, 3, 6 o 9. c) 1. d) 0 o 9.
7. a) Cuando lo es por 2 y por 9. b) Cuando lo es por 5 y por 9.
8. 101, 103 y 107.
9. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. d) 12 y 72.
10. a) 6, 3, 2, 1. b) 7, 1. c) 15, 5, 3, 1. d) 1.
11. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. c) 180, 360, 540. d) 207, 414, 621.
12. 210, 420, 630 y 840; mcm(2, 3, 5, 7) = 210
13. a) Sí. b) No. Divisor común: 7. c) No. Divisor común: 11. d) No. Divisor común: 17.
14. 40 cm. 90 baldosas.
15. 7 · 8 · 9 + 5 = 509.
17. 180 minutos después, a las 11:00 h → mcm(20, 30, 45) = 180.
18. 357 = 3 · 7 · 17 → 3 y 119; 7 y 51; 21 y 17.