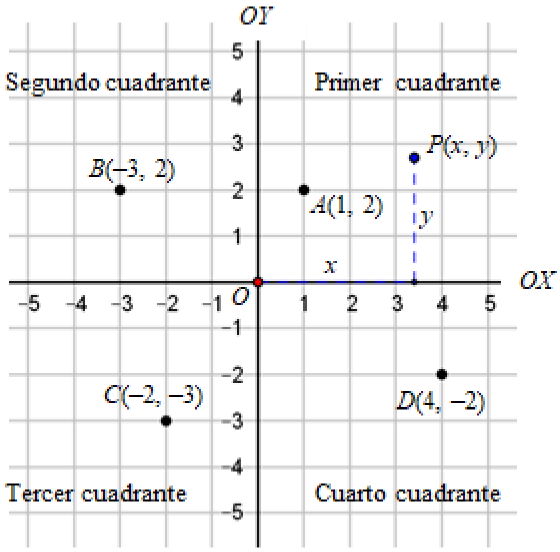
Tema 13. Gráficos en el plano: relaciones y funciones Resumen

Sistema de referencia cartesiano

Se utiliza para representar puntos y demás elementos geométricos en el plano. Se determina a partir de dos rectas perpendiculares (una horizontal, la otra vertical), llamadas ejes cartesianos; su punto de corte se llama origen o centro de coordenadas, denotado por $O(0, 0)$. Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamados cuadrantes.

El eje horizontal se llama eje de abscisas, eje *OX* o "eje de las *x*". A la derecha del origen las abscisas son positivas; a la izquierda, negativas.

El eje vertical se llama eje de ordenadas, eje *OY* o "eje de las *y*". Por encima del origen las ordenadas son positivas; por debajo, negativas.



Cualquier punto del plano se designa por dos números, que son sus coordenadas. El primer número indica la abscisa; el segundo, la ordenada. En el dibujo adjunto se han representado los puntos (1, 2), (–3, 2), (–2, –3) y (4, –2). Los puntos pueden designarse con letras mayúsculas: $A(1, 2)$ o $A = (1, 2)$; $B(-3, 2)$ o $B = (-3, 2)$; $C(-2, -3)$ o $C = (-2, -3)$; $D(4, -2)$ o $D = (4, -2)$.

Un punto genérico se indica por $P(x, y)$ o $P = (x, y)$.

Los puntos del eje *OX* son de la forma $(x, 0)$; así: (1, 0); (3, 0); (–2, 0).

Los puntos del eje *OY*, de la forma $(0, y)$; así: (0, 2); (0, 4); (0, –3).

Nota: Los sistemas de referencia se utilizan para situar los elementos de un determinado conjunto. Por ejemplo: 1) En un parking, cada una de las plazas de aparcamiento suele determinarse mediante una letra y un número; así, C37 indicaría que el coche está aparcado en la sección C y en la plaza número 37. 2) En un hotel, las habitaciones suelen designarse con tres números, que indican la planta y el número de habitación; así **3**24 puede indicar que la habitación es la número 24 de la planta 3ª. 3) Las coordenadas geográficas (longitud y latitud) se utilizan para localizar puntos en la superficie terrestre; las coordenadas de Huesca son: Longitud: 0° 24' 31", Oeste; Latitud: 42° 8' 10", Norte. (El punto (0, 0) de este sistema está en el corte de la línea de ecuador con el meridiano de Greenwich).

Tabla de valores: gráficas

Para describir la relación entre dos magnitudes puede recurrirse a dar una tabla de valores o a dar una gráfica.

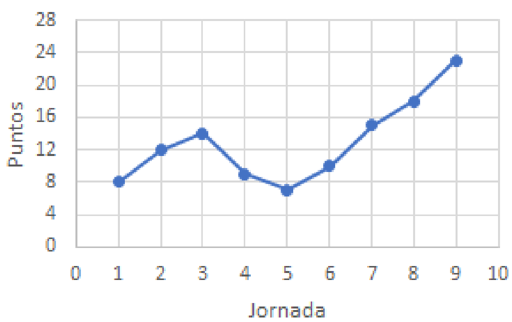
Por ejemplo, los puntos que anotó una jugadora de baloncesto en los nueve primeros partidos de la Liga Escolar se pueden dar mediante la tabla:

Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntos	8	12	14	9	7	10	15	18	23

Esos resultados también se podrían dar indicando los pares (jornada, puntos marcados):

(1, 8); (2, 12); (3, 14); (4, 9); (5, 7);
(6, 10); (7, 15); (8, 18); (9, 23).

Si se representan esos pares y se unen mediante una línea se obtiene la gráfica adjunta.

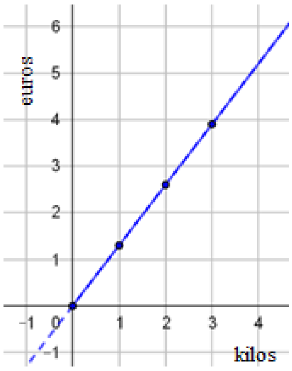


Nota: Observa que se ha cambiado la escala de los ejes; se hace así por motivos estéticos. En estos casos hay que indicar la numeración en cada eje.

Funciones

Una función es una relación entre dos magnitudes (entre dos conjuntos), de manera que a cada valor del primer conjunto le corresponde un único valor del segundo, que se llama imagen.
En el ejemplo anterior (de la jugadora de baloncesto), la relación que se establece es una función, pues en cada partido el número de puntos que mete es único.

→ Entre el conjunto de personas (pongamos los alumnos y alumnas de una clase) y la magnitud edad en años, la relación que indica la edad de cada persona, también es una función: cada persona tiene en un determinado momento una edad única, 13 años, 14 años,… En ningún caso puede tener dos edades a la vez.
Al revés, la relación entre número de años y personas no es una función, pues, por ejemplo, la edad 13 años puede ser común a varias personas.



→ Si un kilo de patatas cuesta 1,30 €, la relación entre el número de kilos de patatas y la cantidad a pagar es una función. En este caso, si se compran *x* kilos, la cantidad a pagar será $y = 1,30 \cdot x$.

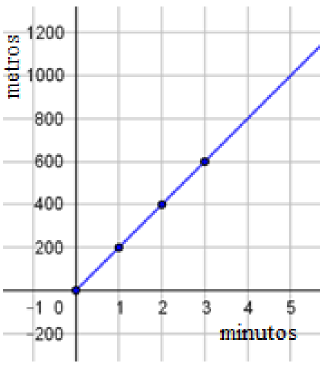
A partir de esta expresión se puede generar la tabla de valores (pares) y representar gráficamente la función.

Kilos (*x*)	1	2	3	…
Precio (*y*)	1,30	2,60	3,90	…

- En una función, las magnitudes que intervienen se llaman variables.

Variable independiente: es la que se fija previamente. En el ejemplo anterior, la variable independiente son los kilos; suele representarse con la letra *x*.
Variable dependiente: se deduce a partir del valor de variable independiente. En el ejemplo anterior, la variable dependiente es la cantidad que se paga; suele representarse con la letra *y*.
(A veces, la *y* se cambia por una letra (*f* es la más usada), escribiendo $y = f(x)$: indica que la *y es función de x*, que el valor que toma *y* depende del que tome *x*, según una *f*órmula dada).

Ejemplos:



a) La distancia recorrida por un ciclista, que va a una velocidad constante de 200 m/min, depende del tiempo transcurrido: metros = 200 · tiempo en minutos. Si el tiempo se designa por *x* y los metros por *y*, la función será $y = 200 \cdot x$.

Una tabla de valores es:

Tiempo en min (*x*)	1	2	3	…
Distancia en metros (*y*)	200	400	600	…

Representando los puntos (1, 200), (2, 400), (3, 600) …, y uniéndolos mediante una línea se obtiene la gráfica adjunta.

b) El área de un cuadrado depende de la longitud de su lado; si el lado mide *x*, su área viene dada por $A(x) = x^2$ (o bien $y = x^2$). La relación "lado del cuadrado y área correspondiente" es una función, pues cada cuadrado tiene un área única. Una tabla de valores es:

Lado en cm (*x*)	0	1	2	3	4	…
Área en cm^2 (*y*)	0	1	4	9	16	…

Representando los puntos (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) …, y uniéndolos mediante una línea se obtiene la gráfica adjunta. (Solo vale si $x \geq 0$).

<u>Funciones lineales</u>

Son aquellas cuya gráfica es una línea recta. Su expresión general es $y = mx + n$, donde *m* y *n* toman valores numéricos.

- Cuando *m* = 0, la <u>función</u> es <u>constante</u>: queda $y = n$, cuya gráfica es una recta horizontal.
- Cuando *n* = 0 , la <u>función</u> se llama <u>de proporcionalidad</u>: queda $y = mx$, cuya gráfica es una recta que pasa por el origen. El coeficiente *m* indica la razón de proporcionalidad.
- Como puede observarse, $y = mx \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = m$, que indica que las variables <u>*x* e *y* son directamente proporcionales</u>, con constante de proporcionalidad *m*.

Ejemplos:

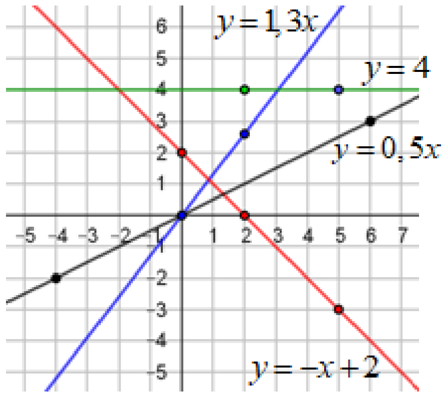
En la gráfica adjunta se representan las funciones:

a) $y = 4 \rightarrow$ función constante. Dos de sus puntos son (2, 4) y (5, 4).

b) $y = -x + 2 \rightarrow$ función lineal. Dos de sus puntos son (0, 2) y (5, –3).

c) $y = 1{,}3x \rightarrow$ función de proporcionalidad. (es la asociada al ejemplo de las patatas, visto anteriormente). Dos de sus puntos son (0, 0) y (2, 2,6).

d) $y = 0{,}5x \rightarrow$ función de proporcionalidad. Dos de sus puntos son (0, 0) y (–4, –2).



<u>Observa</u> que para representar una recta basta con conocer dos de sus puntos.

$\rightarrow$ Las funciones lineales aparecen en múltiples situaciones reales, como se muestra en los ejemplos que siguen.

Ejemplos:

a) La factura de una compañía suministradora (de agua, luz, gas, …) suele constar de dos cantidades: una <u>cantidad fija</u> (por alquiler de equipos de medida y otros servicios), potencia contratada, …); otra <u>cantidad variable</u> (que depende del consumo). Así, si una compañía eléctrica cobra una cantidad fija de 4,5 €/mes y 0,12 € por kWh consumido, entonces, si la variable que mide el consumo es *x*, la factura viene dada por la expresión $f(x) = 0{,}12x + 4{,}5$, que es una función lineal.

En el supuesto de que se consuman 350 kWh, el coste de la factura será,

$$f(350) = 0{,}12 \cdot 350 + 4{,}5 = 46{,}5 \text{ €}.$$

b) En 2020, “Radio Taxi de Sevilla” publicó sus tarifas para los servicios urbanos de taxis. Estas eran:

Concepto	Tarifa 1
Bajada de bandera	1,50 €
Kilómetro recorrido	1,03 €

(La bajada de bandera se hace en el instante de subir al taxi).

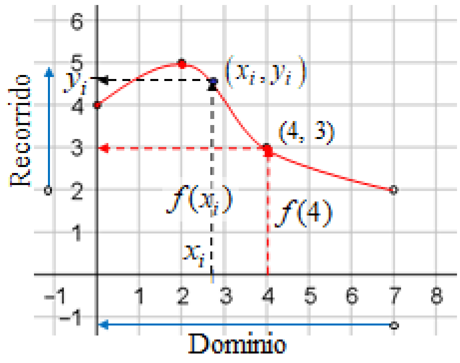
Si el recorrido en km es *x*, el importe del servicio vendrá dado por la función $f(x) = 1{,}03x + 1{,}50$, que es lineal.

En el supuesto de que el recorrido sea de 5,5 km, el importe del servicio será: $f(5{,}5) = 1{,}03 \cdot 5{,}5 + 1{,}50 = 7{,}165$

Interpretación de una gráfica: sus propiedades más características

La gráfica asociada a cualquier fenómeno proporciona una información clara de su comportamiento. Para interpretar correctamente una gráfica hay que saber:

1) Todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función; cada punto (x_i, y_i) de la gráfica indica que a x_i le corresponde y_i. Esto es, si la función se denota mediante la letra *f*, se cumple que $f(x_i) = y_i$. Puede verse que $f(4) = 3$.



2) Reconocer las variables que se representan y en qué eje lo hace cada una de ellas.

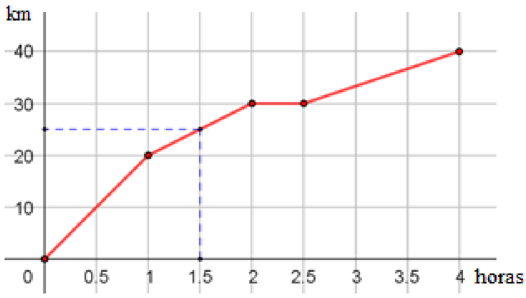
- Los valores de la variable independiente (*x*) se indican en el eje horizontal, el eje de abscisas: eje *OX*.
- Los valores que toma $f(x)$, se indican en el eje vertical, el eje de ordenadas: eje *OY*.
- Los ejes no siempre se cortan en el punto (0, 0). A veces, para dar una información más clara, se elige una referencia distinta y, si conviene, se cambian las escalas de los ejes.

3) Observar entre qué valores se mueve cada variable (el rango de cada una de ellas; para la *x* se llama dominio; para la *y*, recorrido).

4) Deducir sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento; sus máximos y mínimos.

Ejemplos:

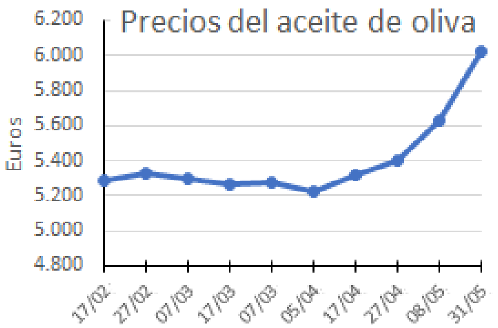
a) En la gráfica adjunta se muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida en una marcha ciclista.

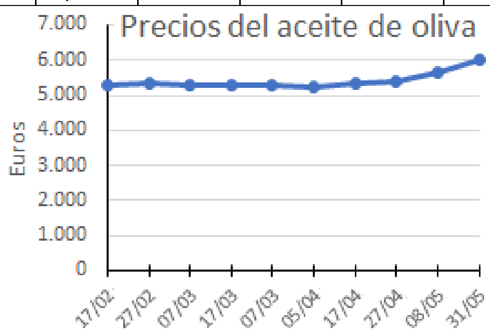


En el eje *OX* se indica el tiempo en horas. La marcha dura 4 horas.
En el eje *OY* se da la distancia recorrida, en km.
En total recorren 40 km.
En la segunda hora recorren 10 km.
Al cabo de 1,5 h han recorrido 25 km, aproximadamente.
Entre las 2 y las 2,5 h han estado parados: la línea es plana. Después han continuado la marcha.

b) En la segunda gráfica se representa la evolución del precio del aceite de oliva virgen extra en determinados días del primer semestre de 2023 (Fuente: infaoliva.com).

Fecha	17/02	27/02	07/03	17/03	07/03	05/04	17/04	27/04	08/05	31/05
€/kg	5,288	5,325	5,300	5,267	5,275	5,225	5,313	5,400	5,625	6,025

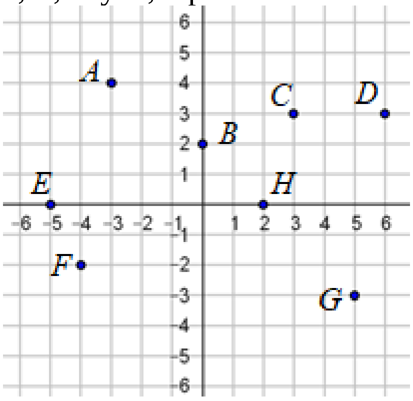




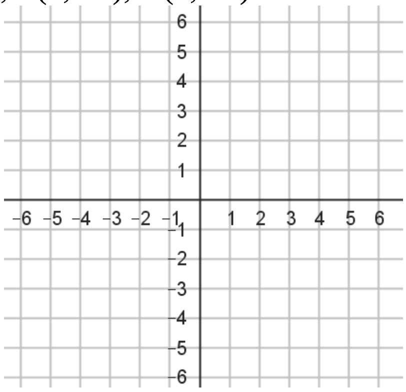
Los gráficos de arriba corresponden a los mismos datos, los dados en la tabla. En el de la izquierda, la numeración del eje vertical comienza en 4,80 €, lo que permite apreciar los cambios con más nitidez, exagerándolos (en tres meses y medio los precios han subido un 14 %). En el de la derecha parece que los precios varían poco. Es obvio que al leer un gráfico hay que observas esos detalles, de lo contrario podríamos ser *engañados*.

Ejercicios

1. Indica las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H*, representados en el plano.



2. Representa en el plano cartesiano los puntos: *A*(3, 2); *B*(−3, −1); *C*(5, 0); *D*(−4, 4); *E*(0, 5); *F*(0, −3); *G*(4, −2).



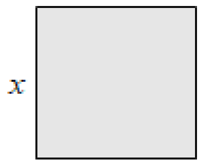
3. Las magnitudes A y B se relacionan como se indica en la tabla:

Magnitud A	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Magnitud B	2	7	8	12	8	12	10	10	8	2

Representan esos pares y únelos mediante una línea para obtener la gráfica correspondiente.
a) ¿A cuántos valores de A les corresponde el valor 8 de B?
b) Si tuvieses necesidad de asignar a los valores 1, 5 y 13 de la magnitud A, los correspondientes en B, ¿qué valores elegirías?

4. Indica si las siguientes relaciones definen una función o no. Justifica la respuesta.
a) A cada persona le corresponde el lugar donde nació.
b) A cada persona le corresponde el idioma que habla.
c) A cada cuadrado le corresponde su perímetro.
d) A cada número natural le corresponde su siguiente.
e) A cada fracción le corresponde otra equivalente.
f) A cada fracción le corresponde la fracción equivalente irreducible.

5. Para un cuadrado de lado *x* da la fórmula de la función que determina:
a) Su perímetro. b) Su área.
Representa ambas funciones en el plano cartesiano.



6. Halla una tabla de valores para las siguientes relaciones entre números:
a) A cada número natural le corresponde su siguiente.
b) A cada número le corresponde el doble.
c) A cada número le corresponde la tercera parte.
En cada caso, halla la fórmula correspondiente a cada función y haz su gráfica.
¿Por qué en el caso a) no tiene sentido unir los puntos con una línea?

7. El peso medio de un feto en función de la semana de gestación se da en la tabla:

Semana	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Peso (g)	43	100	190	300	430	600	760	1005	1319

Haz una gráfica adecuada a los datos.

8. Representa gráficamente las funciones lineales:
a) $y = -2x$; b) $y = -2x + 3$; c) $y = 0,6x$; d) $y = x - 4$.

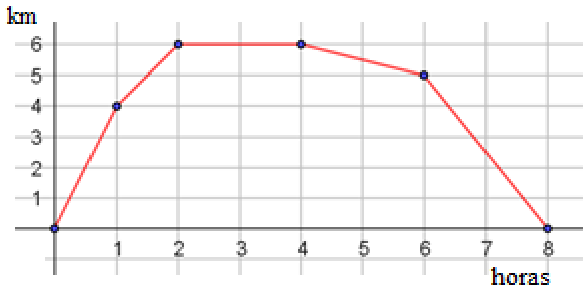
9. Los valores de la temperatura media, en ºC, de Motril (Granada) y de la estación de Navacerrada (Madrid), durante un año determinado, fueron los siguientes:

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Motril (°C)	13,3	14,1	15,8	17,2	19,4	22,7	25,2	25,7	23,3	20	16,6	14,5
Navacerrada (°C)	-1,5	2	2,5	4,6	8,2	13,1	16,6	18,5	11,7	9,2	0,1	2,5

Representa gráficamente la evolución anual de la temperatura.
a) ¿En qué lugar los cambios son más suaves?
b) ¿En qué mes las diferencias son menores?, ¿y mayores?

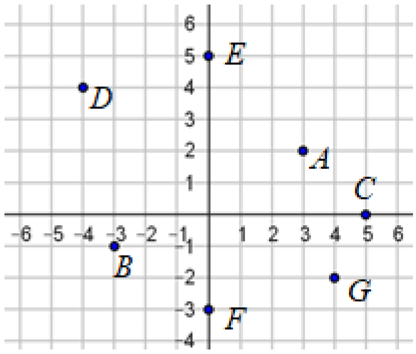
10. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 40 € y un coste adicional de 0,10 € por km recorrido.
(II) 0,30 € por km recorrido.
a) Escribe la función que da el pecio de cada modalidad en función de los kilómetros recorridos.
b) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 150 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 300 km?
c) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.

11. Un grupo de amigos hace una excursión a pie. Durante la excursión se detienen un buen rato para comer; el resto del día caminan más o menos deprisa, contemplando el paisaje y aprovechando para estudiar la flora del entorno. En el gráfico adjunto se indica la distancia a la están del punto de partida, dependiendo de las horas transcurridas.
Contesta:
a) ¿Cuánto dura la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo emplean para comer?
c) ¿Cuánto es lo máximo que se alejan del punto de partida?
d) ¿En qué hora han caminado más deprisa?

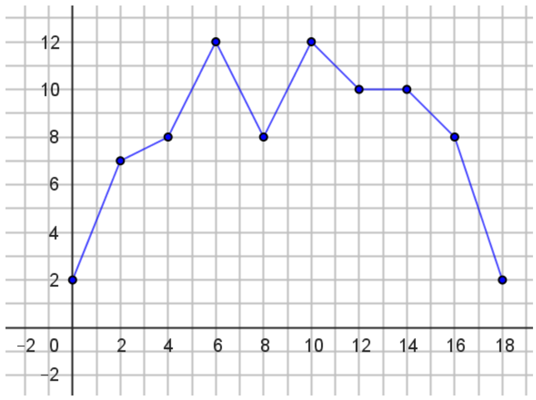


Soluciones:
1. *A*(–3, 4); *B*(0, 2); *C*(3, 3); *D*(6, 3); *E*(–5, 0); *F*(–4, –2); *G*(5, –3); *H*(2, 0).

2.



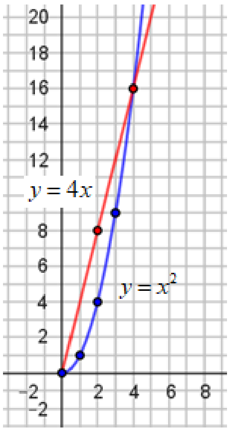
3.



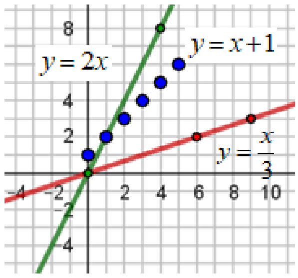
a) 4, 8 y 16. b) 4,5; 10; 10.

4. a) Sí: el lugar de nacimiento es único. b) No: una persona puede hablar varios idiomas. c) Sí: el perímetro depende del lado y es único. d) Sí: todo número natural solo tiene un siguiente. e) No: una fracción tiene muchas equivalentes. f) Sí: la fracción equivalente irreducible es única.

5. a) $p(x) = 4x$; b) $A(x) = x^2$.

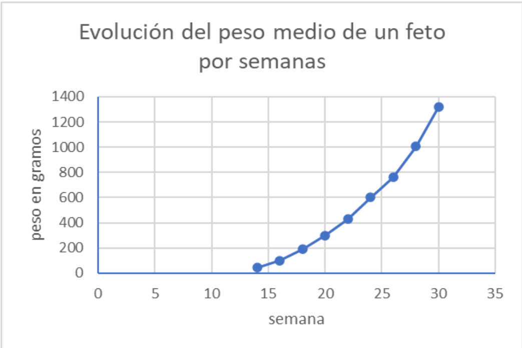


6. a) $y = x + 1$. b) $y = 2x$. c) $y = \frac{x}{3}$.

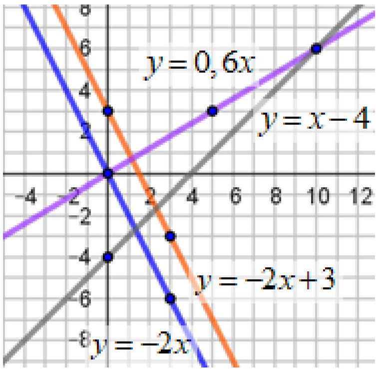


a) No pueden unirse. Solo tienen siguientes los números enteros (en este caso, los naturales).

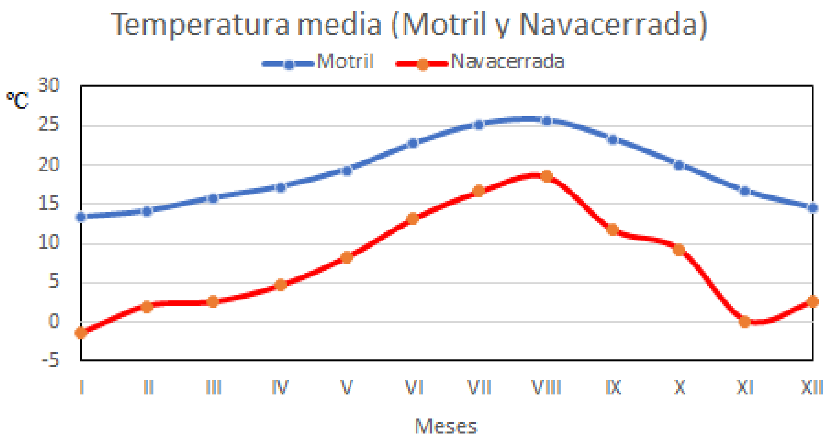
7. a) $p(x) = 4x$; b) $A(x) = x^2$.



8.



9.



a) La temperatura de Motril evoluciona con variaciones suaves a lo largo de todo el año: la diferencia entre los valores mensuales máximos y mínimos es de 25,7 – 13,3 = 11,4 ºC.
En cambio, en Navacerrada las diferencias son más bruscas, así en noviembre se produce un descenso de 9,1 ºC respecto del mes de octubre.
b) En el mes de agosto es mínima, de 7,2 ºC; en noviembre es máxima, 16,5 ºC.

10. a) (I), $y = 40 + 0,10x$; (II) $y = 0,30x$.
b) (I) 150 km, 55 €; 300 km, 70 €. (II) 150 km, 45 €; 300 km, 90 €. Para 150 km interesa (II); para 300 km, interesa (I).
c) 200 km.

11. a) 8 h. b) 2 h. c) 6 km. d) La 1ª: 4 km/h.